T.C.
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI

ORTA ÖĞRETİM PROJESİ

HARİTA-TAPU-KADASTRO

GEOMETRİK HESAPLAMALAR
581MSP079

Ankara, 2011

İÇİNDEKİLER

AÇIKLAMALAR

KOD	**581MSP079**
ALAN	**Harita-Tapu-Kadastro**
DAL/MESLEK	**10. Sınıf Alan Ortak**
MODÜLÜN ADI	**Geometrik Hesaplamalar**
MODÜLÜN TANIMI	Harita-Tapu-Kadastro alanı üçgen, alan, hacim, hesaplamalarıyla ilgili gerekli bilgilerin verildiği öğrenme materyalidir.
SÜRE	40/24
ÖN KOŞUL	Bu modülün ön koşulu yoktur.
YETERLİK	Geometrik hesaplamalar yapmak
MODÜLÜN AMACI	**Genel Amaç** Sınıf ortamında gerekli araç gereç sağlandığında kuralına uygun olarak geometrik hesaplamalar yapabileceksiniz. **Amaçlar** **1.** Kuralına uygun olarak üçgen çözümleri yapabileceksiniz. **2.** Kuralına uygun olarak alan hesapları yapabileceksiniz. **3.** Kuralına uygun olarak hacim hesapları yapabileceksiniz.
EĞİTİM ÖĞRETİM ORTAMLARI VE DONANIMLARI	**Ortam:** Sınıf **Donanım:** Kâğıt, kırmızı kalem, kurşun kalem, gönye, fonksiyonlu hesap makinesi, silgi
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME	Modül içinde yer alan her öğrenme faaliyetinden sonra verilen ölçme araçları ile kendinizi değerlendireceksiniz. Öğretmen modül sonunda ölçme aracı (çoktan seçmeli test, doğru-yanlış testi, boşluk doldurma, eşleştirme vb.) kullanarak modül uygulamaları ile kazandığınız bilgi ve becerileri ölçerek sizi değerlendirecektir.

GİRİŞ

Sevgili Öğrenci,

Harita-Tapu-Kadastro alanını seçerek yeni bir mesleğe adım attınız. Mesleğinizi sevmeniz ve isteyerek yapmanız başarınızın temeli olacaktır. Bir meslek elemanı, mesleğinin önemini iyi kavramalı, sanatı ile gurur duymalıdır. Mesleği ile ilgili teknolojik gelişmeleri yakından takip etmeli, günümüz teknolojisine uyum sağlayabilmelidir.

Sizler, mesleğinizi icra ederken genel ahlak ve iş ahlakına sahip olan, dürüstlük ve güvenilirlik konusunda güven telkin eden; giyimi, davranışı ve mesleğine olan saygısı ile örnek birer kişi olmalısınız.

Ülkemizin en önemli sorunlarından birisi de plansız yerleşim ve çarpık kentleşmedir. Bu büyük sorunun çözümüne katkı sağlayacak Harita – Tapu – Kadastro Alanı’nda iyi yetişmiş teknik elemanlara ihtiyaç vardır.

Mesleğiniz ile ilgili basit hesapları yapabilmeniz için üçgen çözümü, alan hesabı ve hacim hesabını iyi bilmeniz gerekir. Dikdörtgen ya da yamuk şeklindeki bir parselin alanı nasıl bulunur? Maden ocakları, spor sahaları, hava meydanları gibi benzeri yerlerin hacim hesapları nasıl yapılır? İşte tüm bunların cevabını bu modülde bulabileceksiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–1

AMAÇ

Bu faaliyet ile gerekli bilgiler verildiğinde üçgen çözümlerini kuralına uygun yapabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

- Haritacılıkta kullanacağınız üçgen çözümleri hakkında araştırma yapınız. Bilgi toplayınız. Topladığınız bilgileri sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ

Haritacılık problemlerinde üçgen sık kullanılan bir geometrik şekildir. Üçgenler; çeşitkenar, ikizkenar ve dik üçgen olmak üzere üçe ayrılır. Bir üçgen, üç kenar ve üç açı olmak üzere altı elemandan oluşur. Üçgen çözümü için en az bir tanesi kenar olmak üzere üç elemanın verilmesi gerekir. Geriye kalan üç elemanın hesaplaması gerekir.

Üçgen çözümlerine geçmeden önce, üçgenlerin temel özelliklerden bazılarını bilmek gerekir.

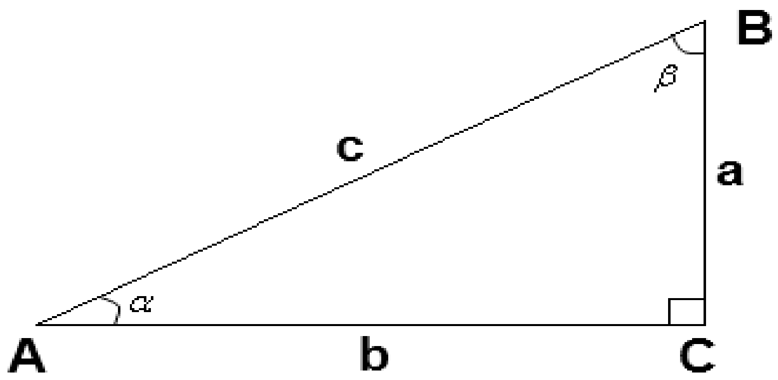
A, B, C bir üçgenin iç açıları, a, b, c ise kenarları olsun, buna göre;

- Üçgenin iç açıları toplamı 180^o veya 200^gdır. $A + B + C = 180^\circ = 200^g$dır.
- Eşit kenarlar karşısında, eşit açılar bulunur. $a = b = c$ ise $A = B = C$'dir.
- Dik üçgenlerde dar açılar, birbirlerini 90^o veya 100^g tamamlar. Yani birbirlerinin tümleridir.
- İkizkenar dik üçgenlerde dar açıların her biri 45^o veya 50^gdır.

1.1. Dik Üçgen Çözümü

Bir açısı dik olan (90° veya 100 g), iki dik kenar ve bir hipotenüsten oluşan üçgenlerdir. Hipotenüs, bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenardır.

Dik üçgenler, trigonometrik fonksiyonlar ve pisagor teoremi kullanılarak çözülür. Dik üçgenlerin çözümünde üçgenin bilinen elemanlarının türüne ve konumlarına göre aşağıdaki dört durumda olabilir.



Şekil 1.1: Dik üçgen

- Birinci durum

İki dik kenarı bilinen dik üçgenin çözümü:

Bilinenler: a ve b dik kenarları

İstenenler: α , β açıları ve c kenarı (hipotenüs)

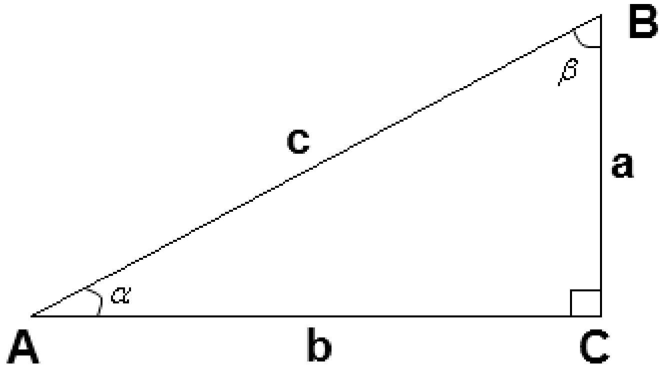
Çözüm:

$c^2 = a^2 + b^2$

$$\tan \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}} = a/b \qquad \text{arc tan} \quad \alpha \text{ bulunur.}$$

$$\tan \beta = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}} = b/a \qquad \text{arc tan} \quad \beta \text{ bulunur.}$$

Örnek:



Şekil 1.2: Dik üçgen

a = 3 m b = 4 m olduğuna göre α , β açıları ile c kenarını hesaplayınız.

Çözüm: $c = 3^2 + 4^2$

$c = 9 + 16 = 25$ $\quad c = \sqrt{25}$ $\quad c = 5$ m

$\tan \alpha = \dfrac{4}{3} = 1{,}333\ldots$ arc tan $\alpha = 59{,}0334^g$

$\tan \beta = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ arc tan $\beta = 40{,}9666^g$

- İkinci durum

Dik kenarlardan birisi ile hipotenüsü bilinen dik üçgenin çözümü:

Bilinenler: a dik kenarı ve c hipotenüsü

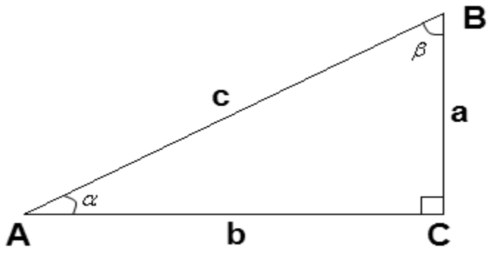
İstenenler: α, β açıları ve b dik kenarı

Çözüm:

$\sin \alpha = \dfrac{\text{Karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \dfrac{a}{c}$ arc sin α bulunur.

Veya $\cos \beta = \dfrac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \dfrac{a}{c}$ arc cos β bulunur.

B dik kenarı ise verilen elemanlardan direkt olarak $b^2 = c^2 - a^2$den bulunur.
Örnek:



Şekil 1.3: Dik üçgen

a = 12 m,   c = 13 m olduğuna göre α, β açıları ile b kenar uzunluğunu bulunuz.

$$\text{Sin } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{12}{13} = 0{,}923077 \quad \text{arc sin } \alpha = 74{,}8668^g$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{a}{c} = \frac{12}{13} = 0{,}923077 \quad \text{arc cos } \beta = 25{,}1332^g$$

b kenarı ise Pisagor bağıntısından yararlanılarak

$c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 - a^2 = b^2$

$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$, $b^2 = \sqrt{25}$ b = 5 m bulunur.

- Üçüncü durum

Dik kenarlardan birisi ve bir dar açısı bilinen dik üçgenin çözümü iki şekilde olur.

Bilinenler: a dik kenarı ve α açısı

İstenenler: β açısı ve b, c, kenarları

Çözüm**:**

β açısı; $\beta = 100^g - \alpha$

c kenarı; $c = \dfrac{a}{\sin \alpha}$

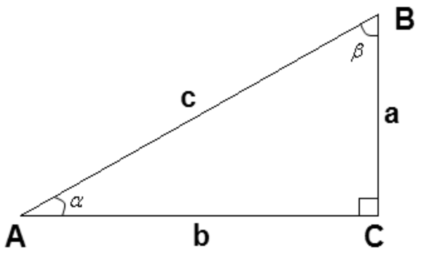
b kenarı ise $\cos \alpha = \dfrac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}}$ $\cos \alpha = \dfrac{b}{c}$ ’den

$b = c \times . \cos \alpha$ veya $b = a \times \text{cotg}\ \alpha$ bulunur.

Örnek:

Şekilde verilen dik üçgende a =30 m, bir açısı α =53,9893^g olarak bilindiğine göre;

β açısı, b ve c kenar uzunluklarını bulunuz.



Şekil 1.4: Dik üçgen

Çözüm:

$\beta = 100^g - \alpha = 100^g - 53{,}9893^g = 46{,}0107^g$

$\text{Sin}\ \alpha = \dfrac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \dfrac{a}{c}$

$a = \sin \alpha \times c$’den $c = \dfrac{a}{\sin \alpha}$

$c = \dfrac{30}{\sin 53{,}9893}$

$$c = \frac{30}{0.75} = 40 \text{ m bulunur.}$$

Pisagor teoreminden;

$c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 - a^2 = b^2$ $b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 40^2 - 30^2 = 1600 – 900 = 700$ $b = \sqrt{700}$ $b = 26,46$ m

Dördüncü durum

Dar açılardan birisi ve hipotenüsü verilen dik üçgenin çözümü:

Bilinenler: α açısı ve c hipotenüs kenarı

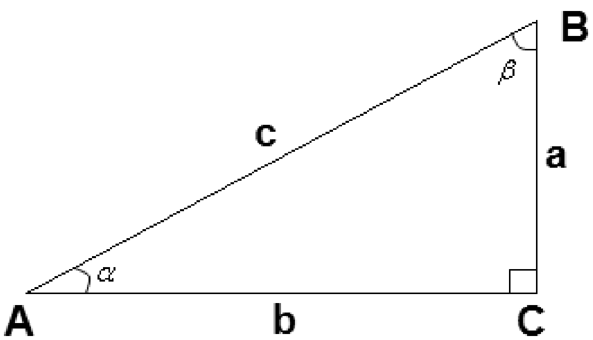
İstenenler: β açısı ve a, b dik kenarları

Çözüm:

β açısı; $\beta = 100^g - \alpha$ a dik kenarı; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $a = c \times \sin\alpha$

b dik kenarı; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $b = c \times \cos\alpha$

Örnek :



Şekil 1.5: Dik üçgen

Verilenlere göre $\alpha = 17,7174^g$ $c = 7,28$ m olarak veriliyor. Buna göre üçgenin diğer elemanlarını hesaplayınız.

Çözüm:

$\beta = 100 - \alpha = 100 - 17,7174 = 82,2826^g$

$$\sin\alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \sin 17,7114 = \frac{a}{7,28}$$

$a = 7,28 \times 0,274776 = 2$ m

Pisagor teoreminden;

$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 - a^2 = b^2$
$b^2 = c^2 - a^2 = 7,28^2 - 2^2 = 52,9984 - 4 = 48,9984$ $b^2 = \sqrt{48,9984}$ $b = 7$ m

ya da

$$\sin\beta = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{b}{c}$$

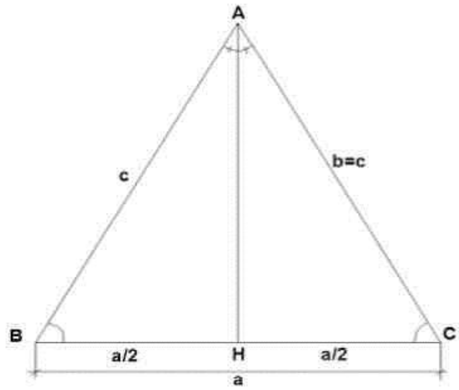
$$\sin 82,2826 = \frac{b}{7,28}$$

$$0,961523 = \frac{b}{7,28}$$

$b = 7,28 \times 0,961523 = 7$ m bulunur.

1.2. İkizkenar Üçgen Çözümleri

İkizkenar üçgenler, iki kenarı ve iki açısı eşit üçgenlerdir. Bu üçgenlerde farklı açının bulunduğu köşeden (A), tabana inilen dik (AH), bu köşedeki açıyı ve bu açının karşısındaki taban kenarını (a) iki eşit parçaya böler. Hem A açısının açıortayı hem de a kenarının kenar ortayı olan (AH) diki, aynı zamanda ABC ikizkenar üçgenini iki eşit üçgene ayırır.



Şekil 1.6: İkizkenar üçgen

İkizkenar üçgenlerde bir açı belli ise diğer açılar da belli demektir.

İkizkenar üçgenlerin çözümünde, üçgenin bilinen elemanlarının türüne ve konumlarına göre aşağıdaki beş durumda olabilir.

- Birinci durum

Taban kenarının ve bir yan kenarının uzunluğu bilinen ikizkenar üçgenin çözümü:

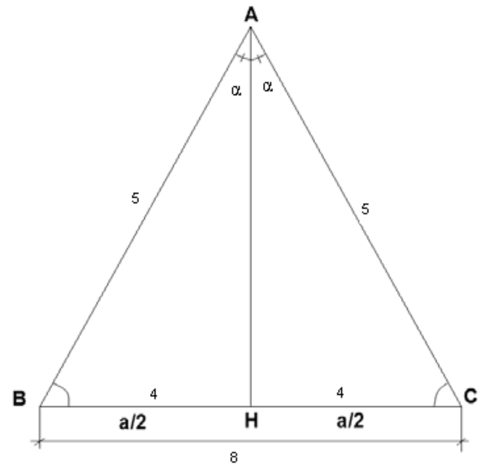
Bilinenler: a ve b kenarları
İstenenler: A, B ve C açıları (B ve C açıları eşittir.)

Çözüm:
Şekil 1.6'da görüldüğü gibi, c = b ve BH = a /2'dir.
ABH veya AHC dik üçgeninde,

$$\sin A/2 = \frac{a/2}{b} = \frac{a}{2b} = \text{ olduğundan } \frac{A}{2} \text{ açısı ; } \frac{A}{2} = \arcsin\frac{a}{2b} \text{ şeklinde buradan}$$

A açısı da, A = 2 (A / 2) olarak bulunur.
ABC üçgeninde, $A + B + C = 200^g$ ve B = C olduğundan
A + 2B = 200 yazılıp B ve C açıları da, $B = C = 100^g - (A / 2)$ olarak elde edilir.

Örnek:



Şekil 1.7: İkizkenar üçgen

ABC üçgeni ikizkenar üçgendir.
a = 8 m
b = c= 5 m
A ,B ve C açılarını bulunuz.

Çözüm :

$$\sin \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad \text{arc} \quad \alpha = 59{,}0334^{g}$$

$A = 2 \times \alpha = 2 \times 59{,}0334 = 118{,}0668^{g}$

$A + B + C = 200$

$118{,}0668 + 2B = 200$

$2B = 200 - 118{,}0668$

$2B = 81{,}9332$

$B = 40{,}9666^{g}$
$B = C$ olduğundan; $C = 40{,}9666^{g}$

- **İkinci durum**

Taban kenarı ve eşit açılardan birisi bilinen ikizkenar üçgenin çözümü:

Bilinenler: a kenarı ve B açısı

İstenenler: c (veya b) kenarı ve A açısı

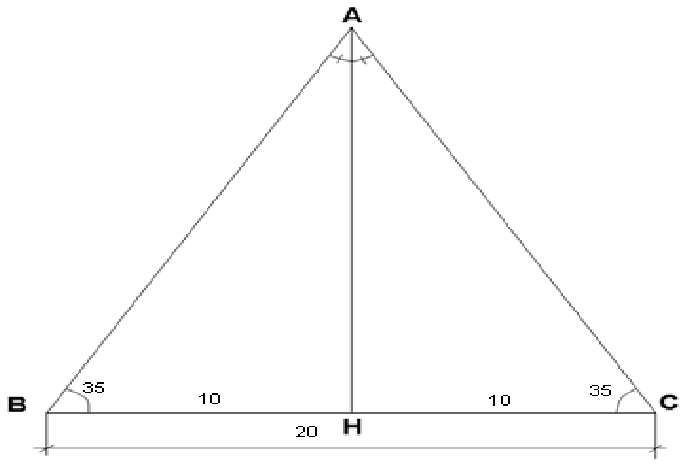
Çözüm: Şekil 1.7'deki ABC üçgeninde, $A + B + C = 200^g$ ve $b = c$, $B = C$ olduğundan A açısı; $A = 2\,(100-B)$ olarak bulunur.

ABH dik üçgeninde;

$$\cos B = \frac{a/2}{c} = \frac{a}{2c}$$ olduğundan;

b veya c kenarı, $$b = c = \frac{a}{2\cos B}$$ eşitliği ile bulunur.

Örnek:



Şekil 1.8: İkizkenar üçgen

Şekil 1.8'deki ABC dik üçgeninde BC = 20 m, $B = C = 35^g$ olduğuna göre AB =AC kenar uzunlukları ile A açısını hesaplayınız.

Çözüm:

$A + B + C = 200^g$

$A + 35 + 35 = 200^g$

$A + 70 = 200$
$A = 200 - 70$
$A = 130^g$

BC = 20 m olduğundan;

$$BH = \frac{BC}{2} = 10 \text{ m}$$

ABH dik üçgeninden;

$$\text{Cos B} = \frac{\text{Komşu dik kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\text{Cos } 35 = \frac{10}{AB}$$

$0{,}8526 \times AB = 10$

$$AB = \frac{10}{0{,}8526} \qquad AB = 11{,}73 \text{ m} \qquad AB = AC = 11{,}73 \text{ m olur.}$$

- **Üçüncü durum**

Yan kenarı ve eşit açılardan birisi bilinen ikizkenar üçgenin çözümü:

Bilinenler: b veya c kenarı ve B veya C açısı

İstenenler: a taban kenarı ve A açısı

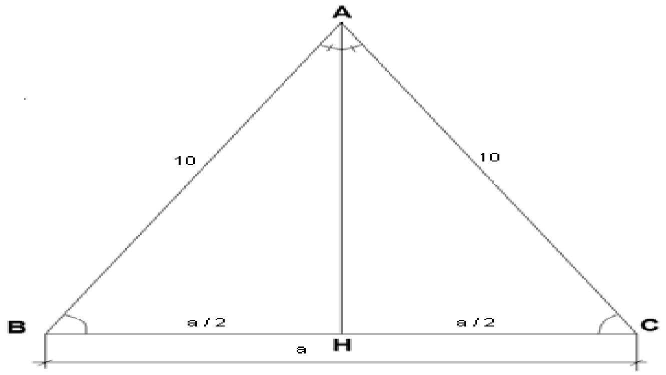
Çözüm:

Şekil 1.8'deki AHB veya AHC dik üçgenlerinde A açısı;

$A = 2\,(100^g - B) = 2\,(100^g - C)$ eşitliği ile aynı üçgenlerde BC taban kenarı,

$\cos B = \dfrac{BC/2}{AB}$ bağıntısından $BC = 2\,(AB \times \cos B)$ eşitliği ile bulunur.

Örnek:



Şekil 1.9: İkizkenar üçgen

Şekil 1.9'da ABC üçgeni ikizkenar bir üçgendir. AB =AC = 10 m, B ve C açıları eşit olup 40g olduğuna göre a taban kenar uzunluğunu ve A açısını hesaplayınız.

Çözüm:

A + B + C = 200g
A + 40 + 40 = 200g
A + 80 = 200g
A = 200 – 80 = 120g

ABH dik üçgeninde

$$\text{Cos B} = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\cos 40 = \frac{a / 2}{10}$$

$$0{,}8090 \;.\; 10 = \frac{a}{2}$$

a /2 = 8,09
a = 2 × 8,09 = 16,18 m bulunur.

➢ Dördüncü durum

Taban kenarı ve bu kenar karşısındaki açısı bilinen ikizkenar üçgenin çözümü:

Bilinenler: a kenarı ve A açısı
İstenenler: b veya c kenarı ve B veya C açısı

Çözüm:

A açısı bilindiğinden A / 2 açısı bulunur.

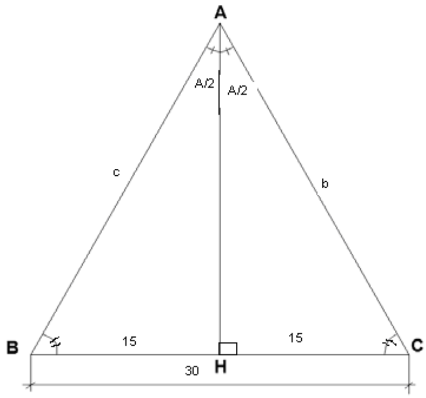
Şekil 1.10'daki ABH dik üçgeninde,

$$\sin \frac{A}{2} = \sin A/2 = \frac{a/2}{c} = \frac{a}{2c}$$

olduğundan; c veya b kenarı, $b = c = \frac{a}{2\sin a/2}$ eşitliği

ile B veya C açısı da, $B = C = 100^{g} - a/2$

Örnek



Şekil 1.10: İkizkenar üçgen

Şekildeki ABC ikizkenar üçgeninde A açısı 60g ve a kenarı 30 m olduğuna göre b veya c kenarı uzunluğu ile A veya C açısını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{Sin } A/2 = \frac{BH}{AB}$$

$$A + B + C = 200^g$$
$$60 + B + C = 200^g$$
$$B + C = 200 - 60 = 140$$

$$\text{Sin } 30 = \frac{15}{c}$$

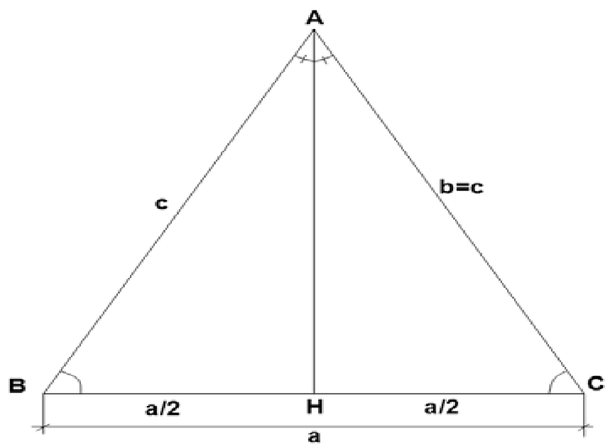
B = C olduğundan 2B = 140

$B = 70^g$ $C = 70^g$ olur.

$$0{,}4540 = \frac{15}{c}$$

$0{,}4540 \times c = 15$
c = 33,04 m c = b olduğundan; b = 33,04 m'dir.

➢ **Beşinci durum**



Şekil 1.11: İkizkenar üçgen

Yan kenarlarından birisi ve taban kenarı karşısındaki açısı bilinen ikizkenar üçgenin çözümü:

Bilinenler: b veya c kenarı ve A açısı
İstenenler: a taban kenarı ve B veya C açısı

Çözüm:

A açısı verildiğinden (A / 2) açısı da bellidir.

Şekil 1.11'deki ABH dik üçgeninde,

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a/2}{c}$$ bağıntısından a kenarı, $a = 2\ c.\sin(A/2)$ eşitliği ile B veya C açısıda

$C = B = 100^g - (A / 2)$ olarak elde edilir.

Örnek:

Şekildeki ABC ikizkenar üçgende b = c = 25 m, A açısı 80g olduğuna göre a taban kenarı ile B veya C açısını hesaplayınız.

Çözüm:

$80 = A$
$A/2 = 80 / 2 = 40^g$
$\sin A/2 = a/2/c$

$\sin 40 = a/2/25$
$a / 2 = 0{,}5878 \ . \ 25$
$a / 2 = 14{,}70$ m
$a = 2 \ . \ 14{,}70 = 29{,}40$ m

$A + B + C = 200^g$
$80 + B + C + = 200^g$
$B + C + = 200 – 80$
B = C olduğundan $2B = 120$ $B = 60^g$

1.3. Bir Kenarı ve İki Açısı Verilen Üçgenin Çözümü

Bilinenler: β, y açıları ve a kenarı
İstenenler: b, c kenarları ve α açısı

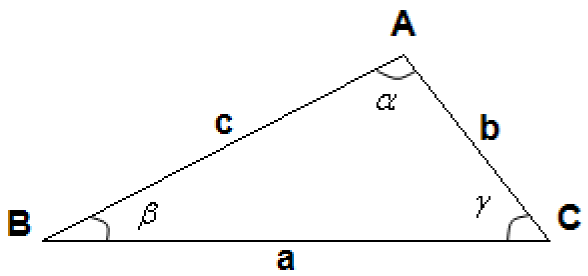
Çözüm:

Önce α açısı, verilen diğer açıların toplamının 200^g veya 180° farkından bulunur.

Sonra sinüs teoreminden diğer kenarlar (b, c) hesaplanır.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin y}$$ sinüs teoreminden

$$b = \frac{a \times \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a \times \sin\beta}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{a \times \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a \times \sin\gamma}{\sin\alpha}$$



Şekil 1.12: İki açısı verilmiş üçgen

Örnek:

Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde, a = 50 m, $\beta = 58{,}50^g$, $\gamma = 75{,}50^g$ olduğuna göre α açısı ile b ve c kenarlarını hesaplayınız.

Çözüm:

$\beta + \alpha + \gamma = 200^g$

$\alpha + 58{,}50 + 75{,}50 = 200$

$\alpha + 134 = 200$

$\alpha = 200 - 134 = 66^g$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$ eşitliğinden

$$\frac{50}{\text{Sin } 66} = \frac{b}{\sin 58{,}50}$$

$$\frac{50}{0{,}86074} = \frac{b}{0{,}79494}$$ (içler dışlar çarpımından)

$b \times 0{,}86074 = 50 \times 0{,}79494$

$b \times 0{,}86074 = 39{,}747$ m

$b = \dfrac{39{,}747}{0{,}86074}$ $\quad b = 46{,}18$ m

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{eşitliğinden}$$

$$\frac{50}{\text{Sin } 66} = \frac{c}{\sin 75{,}50}$$

$$\frac{50}{0{,}86074} = \frac{c}{0{,}92686}$$

$c \times 0{,}86074 = 50 \times 0{,}92686$

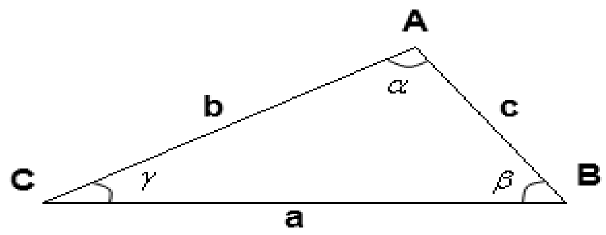
$c \times 0{,}86074 = 46{,}034$

$$c = \frac{46{,}034}{0{,}86074} = 53{,}84 \text{ m}$$

1.4. İki Kenar ve Bir Açısı Verilen Üçgenin Çözümü

Üçgenin bilinen elemanlarının türüne ve konumlarına göre, iki kenar ve aralarındaki açısı veya iki kenar ve bu kenarlardan birinin karşısındaki açısı verilmek üzere iki durumda olabilir.

- **Birinci durum**



Şekil 1.13: iki kenarı verilmiş üçgen

Bilinenler: b, c kenarları ve α açısı
İstenenler: β , *y* açıları ve a kenarı

Çözüm:

Şekil 1.13'e göre cosinüs teoreminden a kenarı bulunur. Sonra sinüs teoreminden diğer açılar (β , *y*) hesaplanır.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$ (cosinüs teoremi)

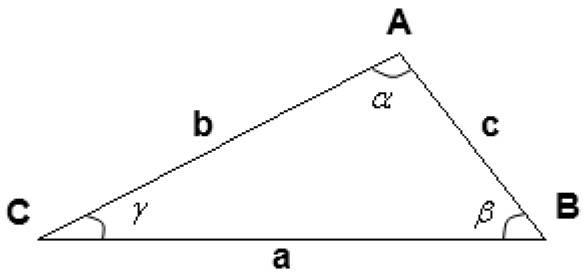
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$ sinüs teoreminden

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{a} b\right) = \arcsin \left(\frac{\sin \gamma}{c} b\right)$$

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{a} c\right) = \arcsin \left(\frac{\sin \beta}{b} c\right)$$

Kontrol : $\beta + \gamma + \beta = 200^g$

Örnek:



Şekil 1.14: iki kenarı verilmiş üçgen

Şekilde verilen ABC üçgeninde b = 40 m, c = 50 m ve $\alpha = 60^g$ olduğuna göre β , γ açıları ile a kenarını hesaplayınız.

Çözüm:

$a2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos \alpha$ (kosinüs teoreminden)
$a2 = 40^2 + 50^2 - 2 \times 40 \times 50 \times \cos 60$ g
$a2 = 1600 + 2500 – 2 \times 4000 \times 0{,}58779$
$a2 = 4100 – 235, 16$
$a2 = 1748, 84$
$a = 41, 82$ m

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{41{,}82}{\sin 60} = \frac{40}{\sin \beta}$$

$$\frac{41{,}82}{0{,}809017} = \frac{40}{\sin \beta}$$

$41{,}82 \times \sin \beta = 40 \times 0{,}809017$

$41{,}82 \times \sin \beta = 32{,}36068$

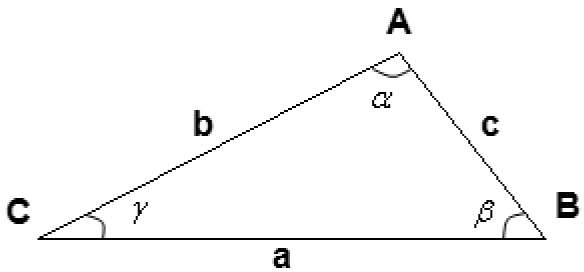
$$\sin \beta = \frac{32{,}36068}{41{,}82}$$

$\sin \beta = 0{,}773808704$ arc sin

$\beta = 56{,}3302^{g}$

$\gamma = 200 - (\alpha + \beta)$
$= 200 - (60 + 56{,}3302)$
$= 83{,}6698^{g}$ olur.

- **İkinci Durum**



Şekil 1.15: İki kenarı verilmiş üçgen

Bilinenler: a, c kenarları ve γ açısı
İstenenler: α, β açıları ve b kenarı

Çözüm:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma$$

$\beta = 200^g - (\alpha + \gamma)$

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

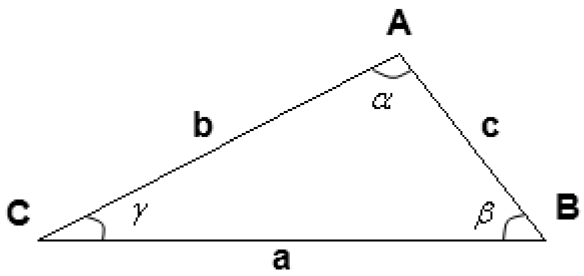
Bu üçgen çözümünde;

a $\leq$ c ise küçük kenar karşısında küçük açı olacağından $\alpha \leq \gamma$ ve daima a < 100^g veya 90° olur. Bu durumda tek çözüm vardır.

a > c ise; α açısı iki anlamlı olur. Yani iki çözüm vardır.

α açısı 100^g dan hem büyük hem de küçük olabilir. Buna göre, verilen kenarlardan büyüğünün karşısındaki açı verilmiş ise tek çözüm vardır. Verilmemiş ise iki çözüm vardır.

Örnek:



Şekil 1.16: İki kenarı verilmiş üçgen

Şekilde verilen ABC üçgeninde a = 70 m, c = 100 m ve $\gamma = 57{,}2022^g$ olarak veriliyor. α, β açıları ile b kenarını bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{70}{\sin \alpha} = \frac{100}{\sin 57{,}2022}$$

$100 \times \sin \alpha = 70 \times \sin 57{,}2022$

$100 \times \sin \alpha = 70 \times 0{,}78241$

$\alpha + \beta + y = 200$

$36{,}8983 + \beta + 57{,}2022 = 200$

$100 \times \sin\alpha = 54,7687$

$$\sin\alpha = \frac{54,7687}{100}$$

$\sin\alpha = 0,547687$ arc sin $\alpha = 36,8983^g$

$\beta + 94,1005 = 200$

$\beta = 200 - 94,1005$

$\beta = 105,8995^g$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{70}{\sin 36,8983} = \frac{b}{\sin 105,8995}$$

$b \times \sin 36,8993 = 70 \times \sin 105,8995$

$b \times 0,54769 = 70 \times 0,99571$

$b \times 0,54769 = 69,6997$

$$b = \frac{69,6997}{0,54769} \qquad b = 127,26 \text{ m}$$

1.5. Üç Kenarı Verilen Üçgenin Çözümü

Bilinenler: a, b ve c kenarları (Şekil 1.17)
İstenenler: α ,c ve γ açıları ve a kenarı

Çözüm:

Kosinüs teoreminden yararlanarak

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

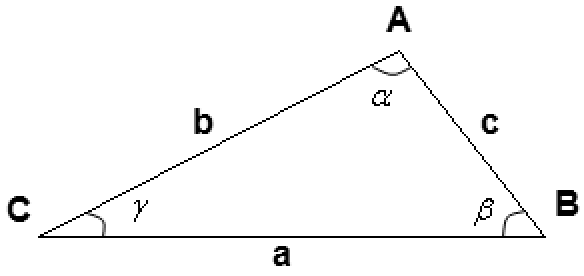
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$\cos y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{} \qquad y = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{}\right)$$

2ab 2ab

Kontrol : $\alpha + \gamma + \beta = 200^g$

Örnek:



Şekil 1.17: iki kenarı verilmiş üçgen

Şekilde verilen ABC üçgeninde a = 100 m, c = 140 m olduğuna göre α, β ve γ açılarını bulunuz.

Çözüm:

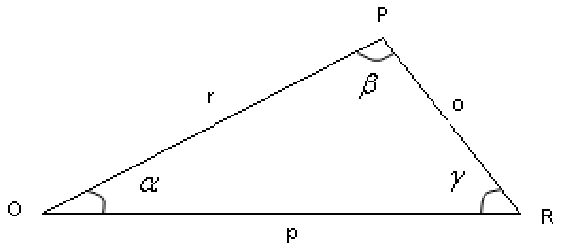
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos\alpha$ (cosinüs teoreminden)
$100^2 = 120^2 + 140^2 – 2 \times 120 \times 140 \times \cos\alpha$
$10\,000 = 34\,000 – 3600 \times \cos\alpha$
$33600 \times \cos\alpha = 34\,000 – 10\,000$
$\cos\alpha = 0{,}714285$
$\alpha = 49{,}3503^g$

$b^2 = a^2 + c^2 -2 \times a \times c \times \cos\beta$
$120^2 = 100^2 + 140^2 - 2 \times 100 \times 140 \times \cos\beta$
$14\,400 = 10\,000 + 19600 – 28\,000 \times \cos\beta$
$28\,000 \times \cos\beta = 29\,600 – 14\,400$
$28\,000 \times \cos\beta = 15\,200$
$\cos\beta = 0{,}542857$
$\beta = 63{,}4685^g$

$c^2 = a^2 + b^2 -2 \times a \times b \times \cos y$
$140^2 = 100^2 + 120^2 - 2 \times 100 \times 120 \times \cos\gamma$
$19600 = 10\,000 + 14\,400 – 24\,000 \times \cos\gamma$
$24\,000 \times \cos\gamma = 24\,400 – 19\,600$
$\cos\gamma = 48\,000$
$\gamma = 87{,}1812^g$
Kontrol : $\alpha + \beta + y = 200^g$ bağıntısından
$49{,}3503 + 63{,}4685 + 87{,}1812 = 200^g$ olur.

Örnek 1

Aşağıda verilen üçgenin bilinmeyen elemanlarını hesaplayınız.
$o = 75$ m $\alpha = 62^g$ $\gamma = 55^g$
$\beta = ?$ $p = ?$ $r = ?$



Şekil 1.18: Üçgen

Cevap 1

$\alpha + \beta + \gamma = 200^g$
$\beta = 200 - (\alpha + \gamma)$
$\beta = 200 - (62 + 55) = 83^g$

Sinüs teoreminden;

$$\frac{o}{\sin \alpha} = \frac{p}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \gamma}$$

$$\frac{o}{\sin \alpha} = \frac{p}{\sin \beta}$$

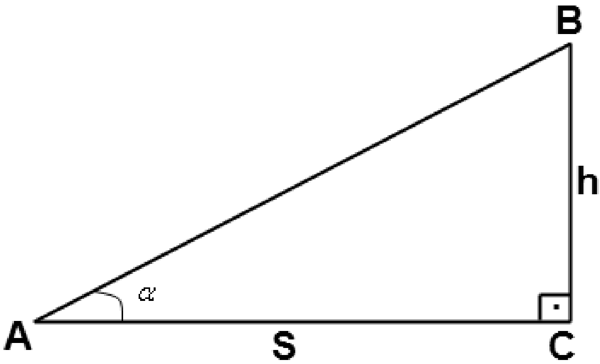
$$P = \frac{o \times \sin \beta}{\sin \alpha} \quad p = \frac{75 \times \sin 83}{\sin 62} \quad p = \frac{75 \times 0{,}96456}{0{,}82708} \quad p = \frac{72{,}342}{0{,}82708} = 87{,}47 \text{ m}$$

$$\frac{o}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \gamma}$$

$$r = \frac{o \times \sin y}{\sin \alpha} \quad r = \frac{75 \times \sin 55}{\sin 62} \quad r = \frac{75 \times 0{,}76041}{0{,}82708} \quad r = 68{,}95 \text{ m}$$

Örnek 2

Eğimli AB yolu üzerindeki A ve B noktaları arasındaki eğik uzunluk (AB)=120 m ve yükseklik farkı (BC)=15 m ise yolun α eğim açısını (yükseklik açısını), eğimini (m = tg α) ve S = AC yatay uzunluğunu bulunuz.



Şekil 1.19: Üçgen

Cevap 2

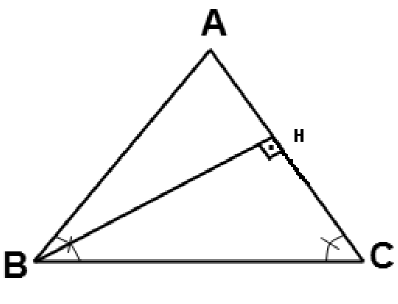
(AB) = 120 m ve (BC) = 15 m ise

$S = AC^2 = AB^2 - BC^2 =$ $AC^2 = 120^2 - 15^2 = 14400 – 225 = 14175$

$AC = 119{,}06$ m

Örnek 3:

ABC ikizkenar üçgeninin elemanları AB = AC = 30 m ve $B = 73^g$ olarak veriliyor. B noktasından AC kenarına inilen BH dikinin boyunu bulunuz.



Şekil 1.20: Üçgen

Cevap 3:

AB = AC = 30 m

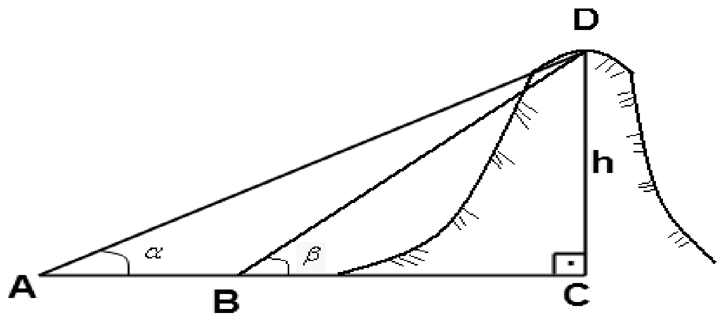
$C = B = 73^g$ ise;
$A = 200 - (B+C) = 200 - 2B$
$A = 200 - 2 \times 73 = 200 - 146 = 54^g$

$$\text{Sin } A = \frac{BH}{AB} \text{ bağıntısından}$$

$BH = AB \times \sin A = 30 \times \sin 54 = 22{,}50$ m olur.

Örnek 4:

Bir dağın yüksekliğini bulmak için şekilde görülen α ve β açıları ve AB kenarı, $\alpha = 389{,}157^g$ $\beta = 519{,}6734^g$ AB = 420,00 m olarak ölçülmüştür. Dağın h yüksekliğini bulunuz.



Şekil 1.21: Üçgen

Cevap 4:

BDC ve ADC dik üçgenlerinde;

$$\text{cotg } \beta = \frac{BC}{h} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{AC}{h} \text{ bağıntılarından;}$$

$BC = h \times \text{cotg } \beta$; $AC = h \times \text{cotg } \alpha$ bulunur.
$AB = AC - BC = h \times \text{cotg } \alpha - h \times \text{cotg } \beta = h (\text{cotg } \alpha - \text{cotg } \beta)$

$$h = \frac{AB}{(\text{cotg } \alpha - \text{cotg } \beta)} = \frac{420}{(1{,}463667 - 0{,}948764)} = 815{,}69 \text{ m olur.}$$

Örnek 5:

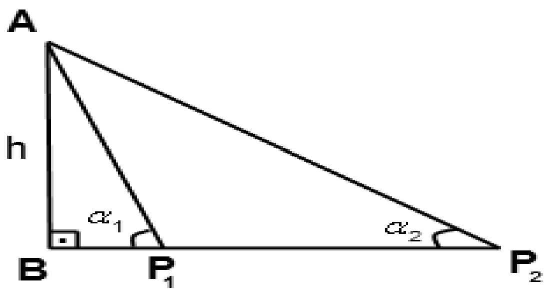
Bir binanın yüksekliğini ölçmek için teodolite ölçü aleti ile P_1 ve P_2 gibi iki ayrı noktadan aynı düşey düzlem üzerinde gözlem yapılarak eğim açıları, $\alpha_1 = 57^g$,

$\alpha_2 = 47^g, 5842$ olarak ölçülmüştür. P_1 ve P_2 arasındaki $P_1 P_2 = 15$ m ölçüldüğüne göre binanın yüksekliğini (AB = h) bulunuz.

Cevap 5:

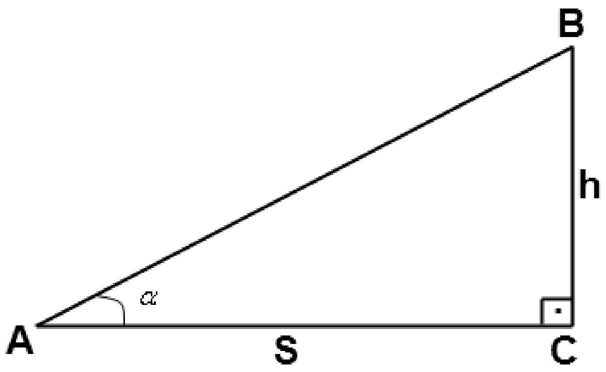
$$AB = h = \frac{P1P2}{(\cot g\ \alpha\ 2 - \cot g\ \alpha\ 1)}$$

$$AB = h = \frac{15}{\cot g(47{,}5842) - \cot g(57)} = 54 \text{ m}$$



Şekil 1.22: Üçgen

UYGULAMA FAALİYETİ



Yukarıdaki şekle ve aşağıdaki verilenlere göre üçgen çözümünü yapınız.

h= 16,03 cm
S= 34,75 cm
$\alpha = 46^{o}, 2605$

$|AB| = ?$

$\hat{B} = ?$

İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Üçgenin elemanlarını belirleyiniz.	➢ Kenar ve açılarını göz önünde bulundurunuz.
➢ Üçgen şekline uygun çözüm tekniğini belirleyiniz.	➢ Üçgen çözümlerinden yararlanınız.
➢ Üçgenin çözümünü yapınız.	➢ Sinüs teoreminden faydalanınız.
➢ Bulunan değerleri yerinde belirtiniz.	➢ Üçgene uydurunuz.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		**Evet**	**Hayır**
1	Üçgenin elemanlarını belirlediniz mi?		
2	Üçgen şekline uygun çözüm tekniğini belirlediniz mi?		
3	Üçgenin çözümünü yaptınız mı?		
4	Bulunan değerleri yerinde belirttiniz mi?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda “Hayır” şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız “Evet” ise “Ölçme ve Değerlendirme”ye geçiniz.

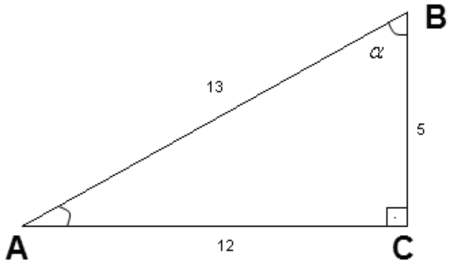
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

1. Bir ABC üçgeninde A = 80^g 1821, C =28^g 4506, olduğuna göre, üçgenin B açısı aşağıdakilerden hangisidir?

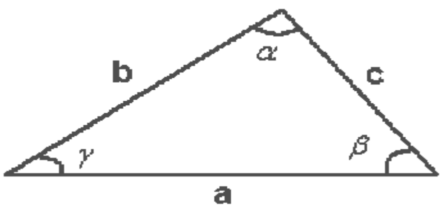
A) 101^g 3673 B) 71^g 3673 C) 81^g 3673 D) 91^g 3673

2. Şekilde verilenlere göre α açısı kaç graddır?



A) 64^g 8668 B) 74^g 8668 C) 52^g 5451 D) 84^g 6886

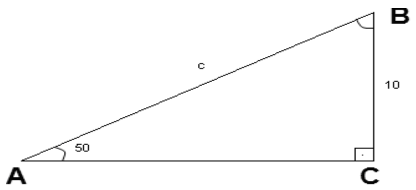
3. Şekildeki üçgende, a = 426,95 m, b = 528,04 m, y = 22^g 22218 olarak ölçüldüğüne göre c kenar uzunluğu nedir?



A) 193,42 m B) 280,70 m C) 282,70 m D) 285,70m

4. Şekildeki üçgende BC = 10 m, $\hat{A} = 50^g$ olduğuna göre hipotenüs c = ?

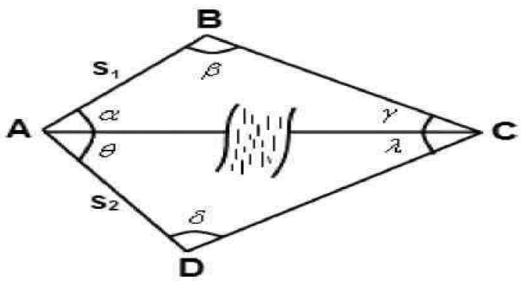
A) 10 m B) 24,12 m C) 14,14 m D) 12,12 m



5. Şekilde verilen değerler ölçüldüğüne göre aradan dere geçmesi nedeni ile ölçülemeyen AC uzunluğunu iki üçgenden kontrollü olarak hesaplayınız.

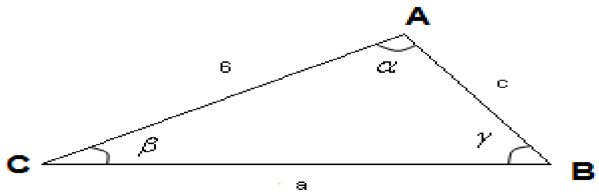
1. Üçgen
$\alpha = 46^g\,1621$ $\beta = 68^g\,4157$
$\gamma = 85^g\,4222$ $S_1 = 1500.00$ m

2. Üçgen
$\theta = 86^g\,1619$ $\delta = 74^g\,8723$
$\lambda = 38^g\,9658$ $S_2 = 843.115$m



A) 1354, 51 m
B) 2354, 48 m
C) 1254, 48 m
D) 2254, 48 m

6. Şekilde verilen ABC üçgeninde BC = 150 m, AC = 170 m, AB=200 m olduğuna göre γ kaç graddır?



A) 75^g 56 B) 63^g 59 C) 62^g 16 D) 82^g 61

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–2

AMAÇ

Bu faaliyet ile gerekli bilgiler verildiğinde alan hesaplamalarını kuralına uygun yapabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

- Düzgün geometrik şekilli alanlar nelerdir?
- Kaç çeşit düzgün geometrik şekilli alan tanımlayabilirsiniz?
- Bu alan çözümlerini kâğıt üzerinde yapabilir misiniz?
- Düzgün geometrik şekilli olmayan alanlar da olabilir mi?
- Bunların çözümünü nasıl yapabiliriz?
- Arkadaşlarınızla beraber araştırıp tartışınız.

2. ALAN HESAPLARI

Haritacılıkta alan hesabı yapmak, özellikle mülkiyet ilişkilerinde çok önemlidir. Kadastro ve kamulaştırma işlerinde alan hesabı yapmak bir zorunluluktur.

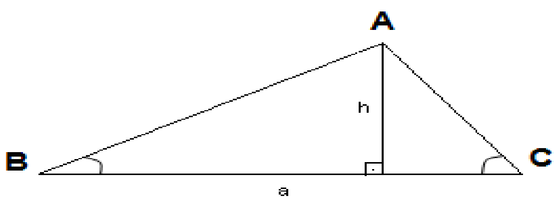
2.1. Düzgün Geometrik Şekillerde Alan Hesapları

Yeryüzünde alanı hesaplanacak adalar ve parseller; üçgen, yamuk, kare, dörtgen şeklinde veya bu şekillere ayrılacak nitelikte olur. O nedenle düzgün şekillerin alanlarını öncelikle öğrenelim.

2.1.1. Üçgenin Alanı

- **Genel alan bağlantısı**

Üçgenin alanı, tabanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.

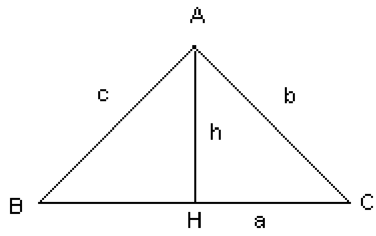


Şekil 2.1: Üçgen

$$F = \frac{a \times h}{2}$$

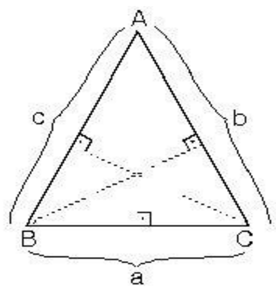
Herhangi bir üçgenin bir açısı 90^{o} veya 100^{g}dan büyük veya küçükse bölgenin alanı (A), üçgenin tabanı (a) ile tabana ait yüksekliğin (h_a) uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir.

$$F = \frac{1}{2} a \times h_a = \frac{1}{2} b \times h_b = \frac{1}{2} c \times h_c$$



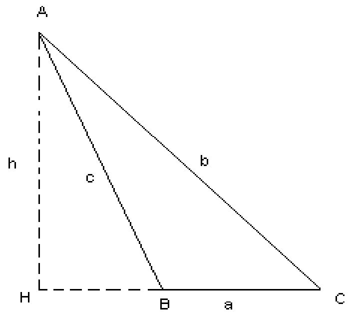
Şekil 2. 2: Üçgen

Hangi kenarı kullanırsak kullanalım üçgenin alanı değişmez (Şekil 2.5).



Şekil 2.3: Üçgen

Bir ABC üçgeninde yükseklik her zaman üçgenin içinde olmayabilir (Şekil 2.6). Bu durumda üçgenin alanı yine aynı şekilde hesaplanır.



Şekil 2.4: Üçgen

Örnek:

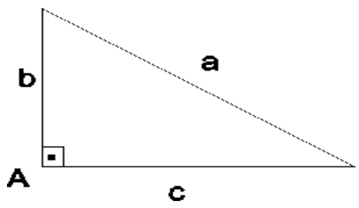
Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde a = 20 m, h = 5 m, olduğuna göre üçgenin alanı kaç m²dir.

$$F = \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2} \times 20 \times 5 = 50 \text{ m}^2$$

- **Dik üçgende alan**

Hipotenüs daima 90^o veya 100g karşısındaki kenardır (Pisagor Teoremi).

a = hipotenüstür.
$a^2 = b^2 + c^2$ dir.

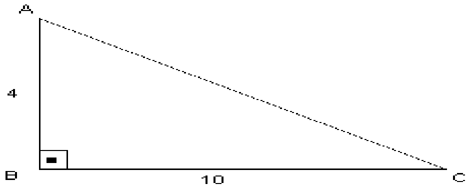


Şekil 2.5: Üçgen

Örnek:

Şekildeki ABC dik üçgeninde

BC = 10 m, AB = 4 m, olduğuna göre üçgenin alanı kaç m^2 dir?

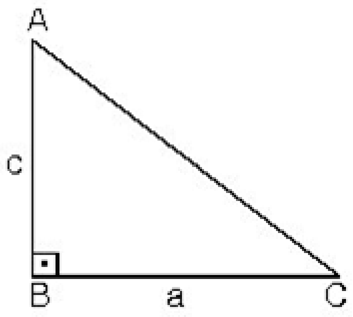


Şekil 2.6: Üçgen

Çözüm:

$$F = \frac{1}{2} \times BC \times AB = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20\ m^2$$

Bir dik üçgende alan dik kenarlarının çarpımının yarısına eşittir.



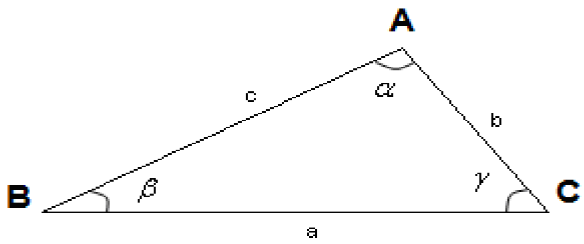
Şekil 2.7: Üçgen

$$F = \frac{a \cdot c}{2}$$

- **Üç kenarının uzunluğu ölçülmüş üçgenin alanı**

u = a +b + c / 2   (u= çevrenin yarısı)

$$F = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$



Şekil 2.8: Üçgen

Örnek:

Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde a = 15 m, b = 20 m ve c = 25 m ise üçgenin alanı kaç m²?

Çözüm :

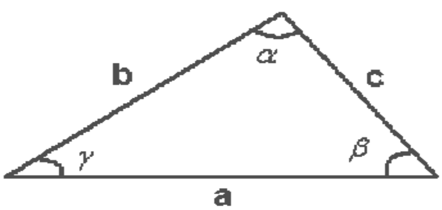
$$U = \frac{a + b + c}{2} = \frac{15 + 20 + 25}{2} = 30$$

$$F = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = \sqrt{30(30-15)(30-20)(30-25)} = \sqrt{30 \times 15 \times 10 \times 5}$$

$$F = \sqrt{22500} = 150 \text{ m}^2$$

- **İki kenar ve aralarındaki açı ölçülmüş üçgenin alanı**

$$F = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\gamma$$



Şekil 2.9: Üçgen

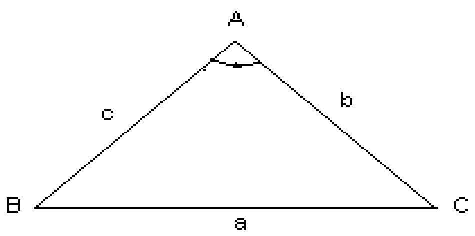
$$F = \frac{1}{2} b \times c \times \sin \alpha = \frac{1}{2} a \times c \times \sin \beta$$

Örnek:

Şekilde verilen üçgende b = 20 m c = 30 m ve A= 60 g ise üçgenin alanı kaç m² dir?

Çözüm:

$$F = \frac{1}{2} 20 \times 30 \times \sin 60 = 25 \times 0{,}0809 = 20{,}23 \text{ m}^2$$

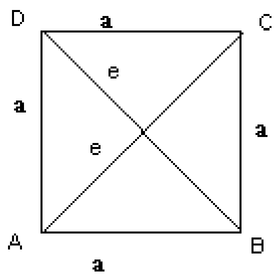


Şekil 2.10: Üçgen

2.1.2. Kare ve Dikdörtgenin Alanı

- **Karenin alanı**

F (ABCD) = a × a = a²



Şekil 2.11: Kare

Karenin dörtkenarı da birbirine eşittir. Alanı ise iki kenarının birbiriyle çarpımına eşittir veya da bir kenarının karesine eşittir.

Örnek:

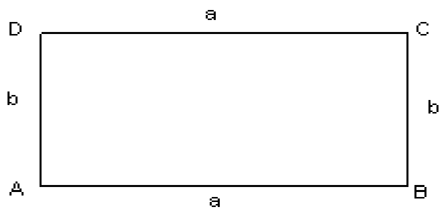
Bir kenarı 10 m olan karenin alanı kaç m^2dir?

Çözüm:

$F = a^2 = 10^2 = 100\ m^2$

Dikdörtgenin alanı

Kısa ve uzun kenar çarpımına eşittir.
$F(ABCD) = a \times b$
$F = a \times b$



Şekil 2.12: Dikdörtgen

Örnek 1:

Kısa kenarı 10 m, uzun kenarı 20 m olan dikdörtgenin alanı kaç m^2dir?

Çözüm 1:

$F = a \times b = 10 \times 20 = 200\ m^2$

Örnek 2:

Uzun kenarı kısa kenarının iki katından 8 cm eksik olan, dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 44 cm olduğuna göre alanı kaç cm^2dir?

Çözüm 2:

Dikdörtgenin kısa kenarına a dersek uzun kenar 2a - 8 olur.
$Ç(ABCD) = 2(a + 2a - 8)$ olur.
$44 = 6a - 16 \quad 60 = 6a$

$$a = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm olur.}$$

$F = a \times b = a \times (2a - 8) = 10 \times (2 \times 10 - 8) = 120 \text{ cm}^2$

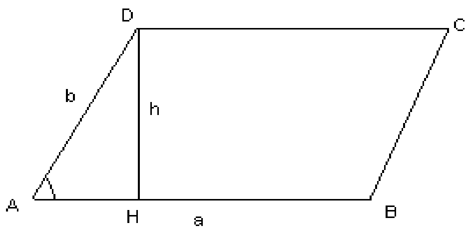
2.1.3. Paralelkenarın Alanı

Paralel kenarın tabanı (a) ile bu tabana ait yüksekliğin (h_a) uzunlukların çarpımına eşittir.

$F = a \times h_a = a \times b \sin a$

Örnek:

Şekilde verilen paralel kenarda a=20 m ve



Şekil 2. 13: Paralelkenar

h = 8m olduğuna göre paralel kenarın alanı kaç m^2 dir?

Çözüm:

$F = a \times h = 20 \times 8 = 160 \text{ m}^2$

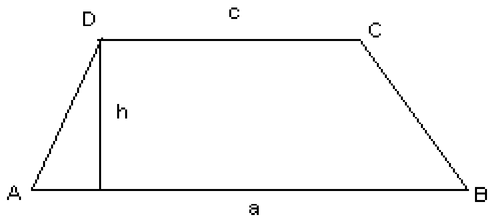
2.1.4. Yamuğun Alanı

Yamuğun alt tabanıyla üst tabanının toplamının ikiye bölünüp tabana ait yükseklikle (h) çarpılması ile bulunur.

$$F(ABCD) = \frac{\text{alt taban + üst taban}}{2} \times h$$

a + c

$$F = \frac{\quad}{2} \times h$$



Şekil 2.14: Yamuk

Örnek:

Şekilde verilen yamuğun alt taban uzunluğu a = 10 m, üst taban uzunluğu c = 6 m ve yükseklik 5 m olduğuna göre yamuğun alanı kaç m^2dir?

Çözüm:

$$F = \frac{a + c}{2} \times h = \frac{10 + 6}{2} \times 5 = 40 \text{ m}^2$$

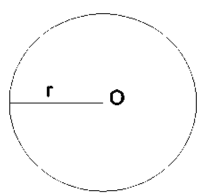
2.1.5. Dairenin Alanı

Bir dairenin alanı, yarıçapın karesinin π sayısıyla çarpımına eşittir.

$F = \pi \times r^2$

Örnek:

Şekilde verilen dairenin yarıçapı r=2 cm ise, dairenin alanı kaç cm^2dir?



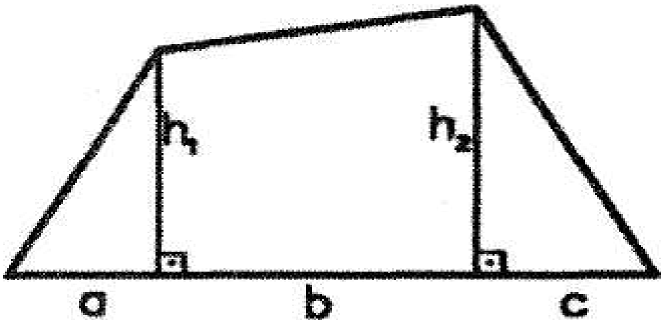
Şekil 2.15: Daire

Çözüm

$F = \pi \times r^2 = 3{,}14 \times 2^2 = 12{,}56\ cm^2$

UYGULAMA FAALİYETİ

Aşağıdaki şekilde gerekli ölçüler yapılmış ve h_1=45,04, h_2 = 18,87 yükseklikleri ile a= 33,50 b= 55,20 ve c=34,03 kenarları ölçülmüştür. Bu ölçülere göre şeklin alanını hesaplayınız.



İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Alanı hesaplanacak şekli belirleyiniz.	➢ Yamuğun alanından faydalanınız.
➢ Alanı hesaplanacak şeklin ölçülerini belirleyiniz.	➢ Ölçmelere dikkat ediniz.
➢ İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle alanını hesaplayınız.	➢ Modülde verilen örneklerden yararlanınız.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		Evet	Hayır
1	Alanı hesaplanacak şekli belirlediniz mi?		
2	Alanı hesaplanacak şeklin ölçülerini belirlediniz mi?		
3	İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle alanını hesapladınız mı?		

DEĞERLENDİRME

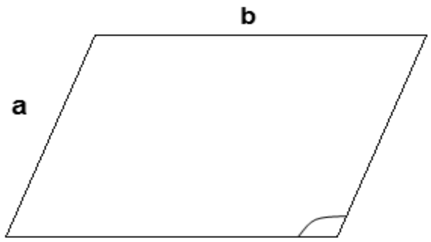
Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz

•

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Şekildeki paralel kenarın a, b kenarları ve β açısı verilmiştir. Bu verilere göre F alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a = 103, 60 m
b = 75, 68 m
$\beta = 139^{g}\,7482$
A) 6261, 23 B) 6361, 23 C) 7261, 23 D) 7361, 23

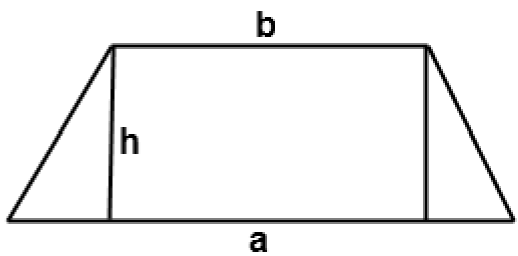


Şekil 2.17

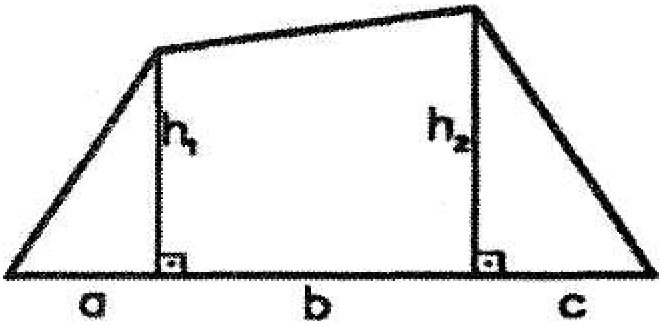
2. Şekilde verilen yamuk biçimindeki arazinin a,b ve h değerleri verilmiştir. Bu verilere göre yamuğun alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a = 150,45 m b = 90,42 m h = 82,37 m

A) 6920,23 B) 7920, 23 C) 8920, 23 D) 9920, 23



3. Şekildeki dörtgenin h_1 = 22.14, h_2 = 28,42 yükseklikleri ile a= 12,50, b= 26,20 ve c=14,43 kenarları ölçülüyor. Bu ölçülere göre dörtgenin alanını hesaplayınız.



A) 1050,76 B) 1005,76 C) 1150,76 D) 1105,76

4. Kenarları 12 m olan kare şeklinde bir parselin alanını bulunuz.

A) 144 B) 124 C) 143 D) 146

5. Uzun kenarı 35,80 m kısa kenarı 22,68 m olan düzgün dikdörtgen şeklindeki meyve bahçesinin alanın hesaplayınız.

A) 810,90 B) 812,50 C) 811,94 D) 811,90

6. Yarıçap uzunluğu 86,72 m olarak ölçülen daire şeklindeki bir yüzme havuzunun alanını hesaplayınız.

A) 23675,50 B) 23685,60 C) 23690,30 D) 23613,93

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–3

AMAÇ

Bu faaliyet ile gerekli bilgiler verildiğinde hacim hesaplamalarını kuralına uygun yapabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

- Düzgün geometrik şekiller nelerdir?
- Kaç çeşit düzgün geometrik şekilli hacim tanımlayabilirsiniz?
- Bu hacim çözümlerini kâğıt üzerinde yapabilir misiniz?
- Düzgün geometrik şekilli olmayan hacimler de olabilir mi?
- Bunların çözümünü nasıl yapabiliriz? Arkadaşlarınızla beraber araştırıp tartışınız.

3. HACİM HESAPLARI

3.1. Düzgün Geometrik Şekilli Cisimlerin Hacim Hesapları

Düzgün geometrik şekilli cisimler olan; küp, dikdörtgenler prizması, silindir, piramit, koni ve kürenin hacimlerinin hesaplanması aşağıdaki gibidir.

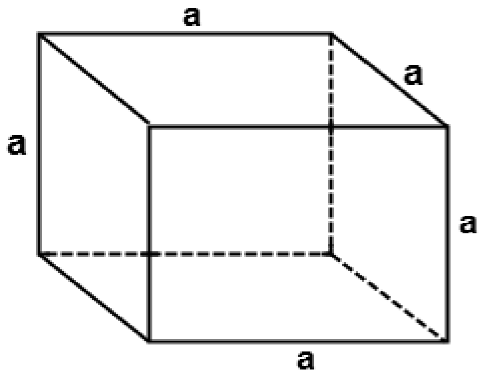
3.1.1. Küpün Hacmi

Küpün hacmi (V), bir kenarının (a) küpüne eşittir.

$V = a \times a \times a = a^3$

Örnek 1: Bir kenarı 5 m olan küpün hacmini hesaplayınız.

Çözüm 1: $V = a^3$
$V= 5^3= 125\ m^3$

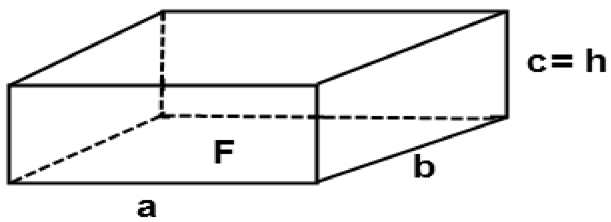


Şekil 3.1: Küp

3.1.2. Dikdörtgenler Prizmasının Hacmi

Dikdörtgenler prizmasının hacmi (V), taban alanı (F) ile yüksekliğinin (h) çarpımına eşittir.

$F = a \times b$
$V = a \times b \times c = F.h$



Şekil 3.2: Dikdörtgenler prizması

Örnek 1: Alanı 560 m^2 olan bir dikdörtgenler prizmasının yüksekliği 20 m olduğuna göre hacmi ne kadardır?

Çözüm 1: $V = a \times b \times c = F.h = 560 \times 20 = 11200\ m^3$

Örnek 2: Kenar uzunlukları a = 15m, b = 24m, c = h = 8 m olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmi ne kadardır?

1. Çözüm yolu: $V = a \times b \times c = 15 \times 24 \times 8 = 2880\ m^3$

2. Çözüm yolu: $F = a \times b = 15 \times 24 = 360\ m^2$
$V = F.h = 360 \times 8 = 2880\ m^3$

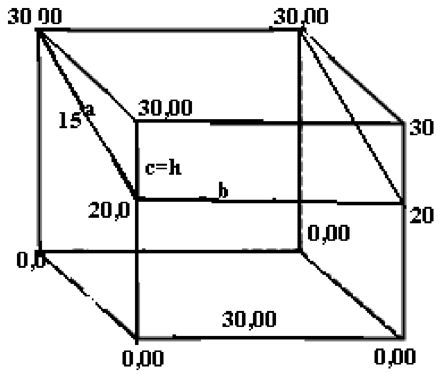
Örnek 3:

Şekil 3.3'de görülen şekildeki gibi bir kazı alanı var. Gerekli yükseklik ölçümleri yapılmış ve şekil üzerine yazılmıştır. En üstte çizgiyle ayrılmış bölümün toprağı boşaltılmak isteniyor, boşaltılacak toprak hacmini bulunuz.

Çözüm 3:

V = a x b x c
c = h = 30 – 20 = 10 m

V = 15 x 30 x 10 = 4500 m³

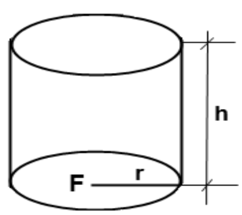


Şekil 3.3: Küp

3.1.3. Silindirin Hacmi

Silindirin hacmi (V), tabanı oluşturan r yarıçaplı dairenin alanı (F) ile yüksekliğinin (h) çarpımına eşittir.

$F = \pi . x\, r^2$
$V = F \times h = \pi . x\, r^2 \times h$



Şekil 3.3: Silindir

Örnek 1: Alanı 60 m² olan bir silindirin yüksekliği 13 m olduğuna göre hacmi ne kadardır?

Çözüm 1: $V = F \times h = 60 \times 13 = 780\ m^3$

Örnek 2: Yarıçapı 32 m ve 54 m olan silindir şeklinde bir çukur kazılmak isteniyor. Çukurdan boşaltılacak toprak hacmini hesaplayınız.

Çözüm 2: $F = \pi \times r^2$

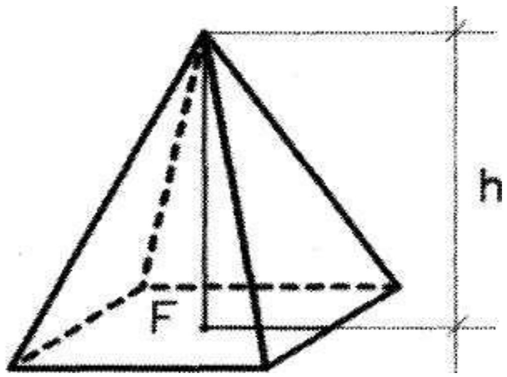
$F = \Pi \times 32^2 = 3216{,}99\ m^2$

$V = F \times h = 3216{,}99 \times 54 = 173717{,}46\ m^3$

3.1.4. Piramitin Hacmi

Piramidin hacmi (V), taban alanı (F) ile yüksekliği (h) çarpımının üçte birine eşittir.

$$V = \frac{F \times h}{3}$$



Şekil 3.4: Piramit

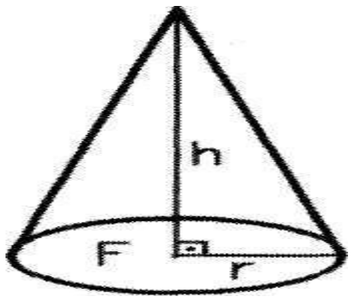
Örnek: Taban alanı 480 m², yüksekliği ise 21 m olan bir piramitin hacmini hesaplayınız.

Çözüm: $V = \frac{F \times h}{3} = 480 \times 21 / 3 = 3360\ m^3$

3.1.5. Koninin Hacmi

Koninin hacmi (V), r yarıçaplı dairenin taban alanı (F) ile yüksekliği (h) çarpımının üçte birine eşittir.

$$V = \frac{1}{3} F \times h = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$



Şekil 3.5: Koni

Örnek: Yüksekliği 30 m, yarıçapı 12 m olan bir koninin hacmini hesaplayınız.

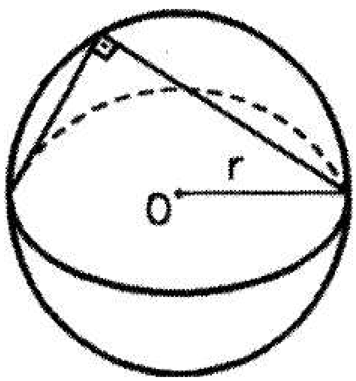
Çözüm:

$$V = \frac{1}{3} F \times h = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \pi \times 12^2 \times 30 / 3 = 13571,68 / 3 = 4523,89 \text{ m}^3$$

3.1.6. Kürenin Hacmi

r yarıçaplı kürenin hacmi (V)

$$V = \frac{4}{3} \times \Pi \times r^3$$



Şekil 3.6: Küre

Örnek: Yarıçapı 18 m olan kürenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

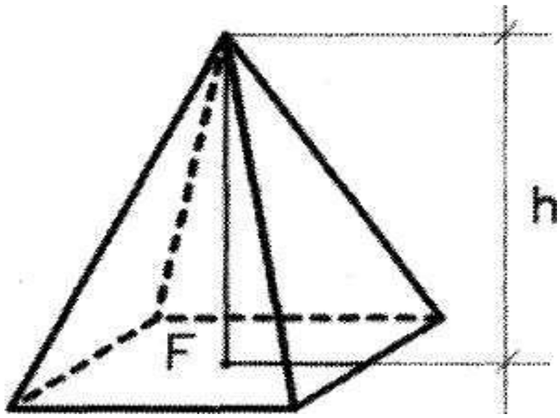
$$V = \frac{4}{3} \times \Pi \times r\ 3$$

$$V = 4 / 3 \times \Pi \times 18^3 = 24429{,}02\ m^3$$

UYGULAMA FAALİYETİ

Aşağıdaki şekilde;

$F = 480\ m^2$
$h = 6\ m$ olarak belirlenmiştir. Şeklin hacmini hesaplayınız.



İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Hacmi hesaplanacak şekli belirleyiniz.	➢ Piramitin hacmi konusundan yararlanınız.
➢ Hacmi hesaplanacak şeklin ölçülerini belirleyiniz.	➢ Ölçmelere dikkat ediniz.
➢ İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle hacmini hesaplayınız.	➢ Modülde verilen örneklerden yararlanınız.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

	Değerlendirme Ölçütleri	Evet	Hayır
1	Hacmi hesaplanacak şekli belirlediniz mi?		
2	Hacmi hesaplanacak şeklin ölçülerini belirlediniz mi?		
3	İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle hacmini hesapladınız mı?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Yüksekliği 4 cm, taban kenarlarından birinin uzunluğu 6 cm olan düzgün piramitin hacmini bulunuz.

A) 28 cm^3 B) 38 cm^3 C) 48 cm^3 D) 58 cm^3

2. Hipotenüsünün uzunluğu 5 birim ve dik kenarlarından birinin uzunluğu 3 birim (r = 3) olan dik üçgen veriliyor. Bu dik üçgen, ölçüsü büyük olan dik kenar etrafında döndürülüyor. Meydana gelen koninin hacmini bulunuz.

A) 12 B) 13 C)14 D) 15

3. Eksenden geçen, kesiti kare olan bir dik silindirin hacmi 169.56 cm^3 olduğuna göre bu dik silindirin taban yarı çapını bulunuz.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3

4. Taban alanı 16 π cm^2 ve yüksekliği 8 cm olan dik silindirin yanal alanı kaç cm^2dir?

A) 48 π B) 64 π C) 72 π D)78 π

5. Tabanının çevresi 44 cm ve yüksekliği 10 cm olan bir kare prizmanın hacmi kaç cm^3tür?

A) 990 B) 1120 C) 1210 D) 1420

6. İçi boş olarak verilen bir silindir kabın taban yarıçapı 4 cm ve yüksekliği 10 cm'dir. Bu kabı doldurmak için hacmi 20 π cm^3 olan sıvılardan kaç kutu dökülmelidir?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 18

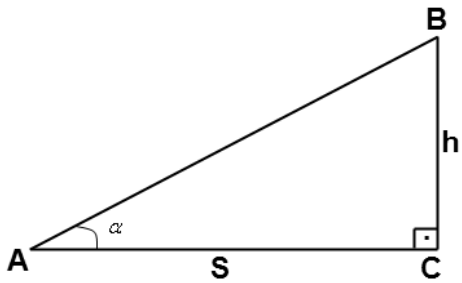
DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru "Modül Değerlendirme"ye geçiniz.

UYGULAMA FAALİYETİ

Aşağıdaki soruları işlem basamaklarını dikkate alarak çözümleyiniz.

A. Verilenlere göre üçgen çözümünü yapınız.



h= 32,06 cm

S= 69,50 cm

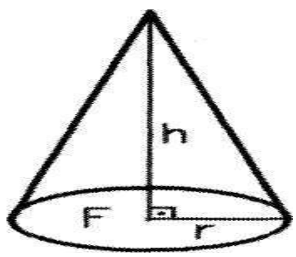
$\alpha = 46^{o},2300$

$|AB| = ?$

$\hat{B} = ?$

B. Yukarıda üçgenin alanını hesaplayınız.

C. Yüksekliği 50 m, yarıçapı 6 m olan bir koninin hacmini hesaplayınız.



İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Üçgenin çözümünü yapınız.	➢ Üçgenin elemanlarını belirleyiniz. ➢ Üçgen şekline uygun çözüm tekniğini belirleyiniz.
➢ İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle alanını hesaplayınız.	➢ Alanı hesaplanacak şekli belirleyiniz. ➢ Alanı hesaplanacak şeklin ölçülerini belirleyiniz.
➢ İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle hacmini hesaplayınız.	➢ Hacmi hesaplanacak şekli belirleyiniz ➢ Hacmi hesaplanacak şeklin ölçülerini belirleyiniz.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

	Değerlendirme Ölçütleri	**Evet**	**Hayır**
1	Üçgenin çözümünü yaptınız mı?		
2	İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle alanını hesapladınız mı?		
3	İstenen şeklin matematiksel yöntemlerle hacmini hesapladınız mı?		

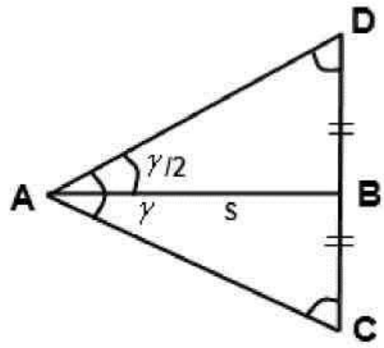
DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz.

MODÜL DEĞERLENDİRME

1. Şekle göre baz latasının uzunluğu CD = 2 m ve $\gamma = 4^g$ 50 veriliyor. AB uzunluğunu bulunuz.

A) 23,46 m
B) 24,46 m
C) 28,28 m
D) 26,28 m



2. Tabanı 23,00 m, yüksekliği 19, 45 m olan üçgenin alanını bulunuz**.**

A) 225,50 B) 223,68 C) 224,60 D) 223,50

3. Bir kenarının uzunluğu 6 birim olan eşkenar üçgen yüksekliklerinden birinin etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin (koninin) hacmini bulunuz.

A) $\sqrt{3}\ \pi$ B) $3\sqrt{3}\ \pi$ C) $6\sqrt{3}\ \pi$ D) $9\sqrt{3}\ \pi$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki modüle geçmek için öğretmeninize başvurunuz.

CEVAP ANAHTARLARI

ÖĞRENME FAALİYETİ 1'İN CEVAP ANAHTARI

1	D
2	B
3	A
4	C
5	A
6	C

ÖĞRENME FAALİYETİ 2'NİN CEVAP ANAHTARI

1	B
2	D
3	B
4	A
5	C
6	D

ÖĞRENME FAALİYETİ 3'ÜN CEVAP ANAHTARI

1	C
2	A
3	D
4	B
5	C
6	A

MODÜL DEĞERLENDİRMENİN CEVAP ANAHTARI

1	C
2	B
3	D

KAYNAKÇA

- ERSOY Nihat, **Trigonometri,** Ankara, 2001.