T.C.
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI

HARİTA-TAPU KADASTRO

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR
581MSP078

Ankara, 2011

İÇİNDEKİLER

AÇIKLAMALAR

KOD	**581MSP078**
ALAN	**Harita- Tapu- Kadastro**
DAL/MESLEK	**10. Sınıf Alan Ortak**
MODÜLÜN ADI	**Trigonometrik Fonksiyonlar**
MODÜLÜN TANIMI	Ölçü birimleri ve bu birimler arasındaki dönüşümlerin, trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntılar ve hesaplamaların yapıldığı öğrenme materyalidir.
SÜRE	40/32
ÖN KOŞUL	Ön koşul yoktur.
YETERLİK	Trigonometrik fonksiyonların hesabını yapmak
MODÜLÜN AMACI	**Genel Amaç:** Sınıf ortamında gerekli araç gereç sağlandığında kuralına uygun olarak ölçü birimlerini ve dönüşümlerini, trigonometrik fonksiyonları ve bunların dönüşümlerini yapabileceksiniz. **Amaçlar:** **1.** Kuralına uygun ölçü birimlerini ve dönüşümlerini yapabileceksiniz. **2.** Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonları kullana-bileceksiniz. **3.** Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonlar arasında bağıntıları kurabileceksiniz. **4.** Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonlarla ilgili teoremleri uygulayabileceksiniz.
EĞİTİM ÖĞRETİM ORTAMLARI VE DONANIMLARI	**Ortam:** Sınıf ortamı **Donanım**: Kâğıt, kırmızı kalem, kurşun kalem, gönye, silgi, fonksiyonlu hesap makinesi ve çözümlü örnekler
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME	Modül içinde yer alan her öğrenme faaliyetinden sonra verilen ölçme araçları ile kendinizi değerlendireceksiniz. Öğretmen modül sonunda ölçme aracı (çoktan seçmeli test, doğru-yanlış testi, boşluk doldurma, eşleştirme vb.) kullanarak modül uygulamaları ile kazandığınız bilgi ve becerileri ölçerek sizi değerlendirecektir.

GİRİŞ

Sevgili Öğrenci,

21.yüzyılda ülkemizde her alanda olduğu gibi harita-tapu-kadastro alanında da düzenlemeler görülmektedir. Çağı yakalamak, koşulları daha iyi ve yaşanılır hâle getirmek sizlerin gayretiyle olacaktır.

Bilindiği gibi ülkemizin en büyük sorunlarından biri de çarpık yapılaşma ve kentleşmedir. Bu sorun o kadar büyüktür ki şehirlerimiz insanlar için yaşanmaz hâle gelmiştir.

Kentleşmedeki bu sorunların çözümü için haritacılığın katkısı büyüktür. Harita bilgilerinin temel konularından biri de trigonometridir.

Trigonometrik Fonksiyonlar modülünde; ölçü birimleri ve birimlerin birbirine dönüşümleri, trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntılar, hesaplamalar hedef olarak alınmıştır. Bu modül bitiminde ölçü birimlerini, birim dönüşümlerini ve trigonometrik bağıntı çözümlerini yapabileceksiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–1

AMAÇ

Ölçü birimlerini ve birimler arasındaki dönüşümleri yapabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

➢ Ölçü birimleri nelerdir? Size farklı gelen ölçü birimleri var mı? Araştırınız. Bu birimlerin mesleğinizde nasıl kullanıldığını öğreniniz. Sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

1.ÖLÇÜ BİRİMLERİ VE BİRİMLER ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER

1.1. Ölçü Birimleri

Ölçü: Uzunluk, açı, alan, hacim, zaman gibi nicelikleri kendi cinslerinde seçilmiş bir birimle karşılaştırıp kaç birim olduklarını belirlemeye denir.

1.1.1 Uzunluk Birimi

Temel uzunluk birimi, birkaç ülkenin dışında metredir. Kısaca (m) ile gösterilir. Paris'ten geçen meridyen yay uzunluğunun kırk milyonda biri olarak tanımlanan metre 1793 yılından beri Fransa'da ve 1875' den beri uluslararası uzunluk birimi olarak çeşitli ülkeler de kullanılmaya başlamıştır.

Ülkemizde 26 Mart 1933 tarih ve 1782 sayılı yasa ile metre sistemi kabul edilmiş ve 1 Ocak 1934 tarihinden itibaren uygulanmaya başlanmıştır.

1.1.1.1. Tanımı

Metre bir uzunluk birimidir. Genellikle kısaltması olan m harfi ile gösterilir.1 metre; ışığın boşlukta 1/299.792.458 saniyede aldığı yol olarak tanımlanmıştır.

Yabancı uzunluk birimleri:

1İnch (inch veya parmak)	$\cong$ 0,0254 m
1Foot (feet veya ayak)	$\cong$ 0,3048 m

1Yard (yarda) = 3 feet	≅ 0,9144 m
1Kara mili = 1760 yarda	≅ 1609 m
1Deniz mili = (1' lık meridyen)	≅ 1852 m
1Coğrafi mil = (4' lık meridyen)	≅ 7421,5 m

1.1.1.2. Uzunluk Birimlerinin Birbirine Dönüştürülmesi

1 000 000 000 000 metre = 10^{12} m =	1 terametre	Tm
1 000 000 000 metre = 10^{9} m =	1 gigametre	Gm
1 000 000 metre = 10^{6} m =	1 megametre	Mm
1 000 metre = 10^{3} m =	1 kilometre	km
100 metre = 10^{2} m =	1 hektometre	hm
10 metre = 10^{1} m =	1 dekametre	dam
1 metre = 10^{0} m =	1 metre	m
0,1 metre = 10^{-1} m =	1 desimetre	dm
0,01 metre = 10^{-2} m =	1 santimetre	cm
0,001 metre = 10^{-3} m =	1 milimetre	mm
0,000 001 metre = 10^{-6} m =	1 mikrometre	µm
0,000 000 001 metre = 10^{-9} m =	1 nanometre	nm
0,000 000 000 001 metre = 10^{-12} m=	1 pikometre	pm

1.1.2. Alan Birimi

Alan: Bir yüzeyin kapladığı büyüklüktür.

Alan birimi: Uzunluk ölçü birimine bağlı türetilmiş bir birimdir. Temel alan birimi metrekaredir ve (m^2) olarak gösterilir. Bir kenarı 1 metre olan bir karenin alanına 1 m^2 denir.

1.1.3. Hacim Birimi

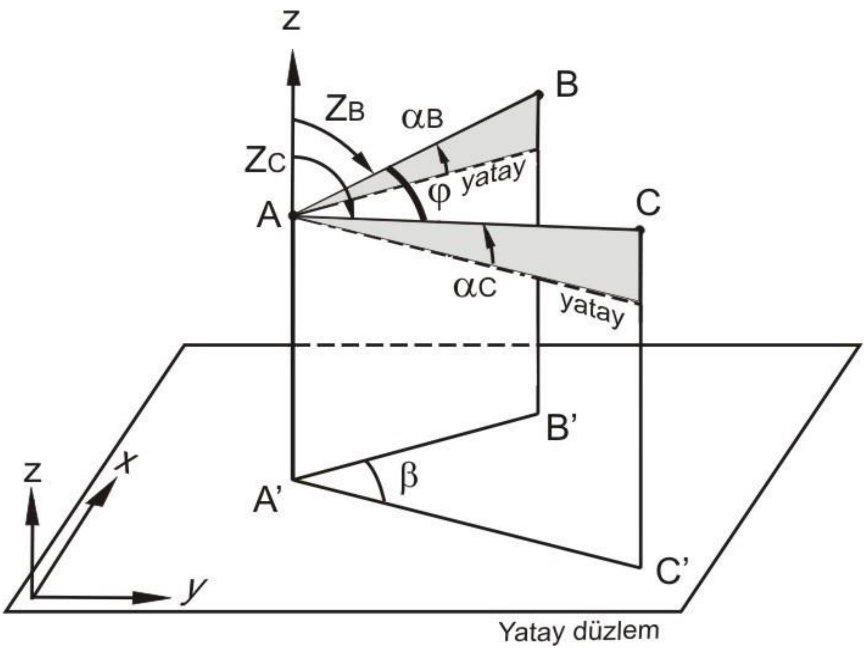
Hacim: Bir cismin uzayda kapladığı yer miktarına denir.

Hacim birimi: Alan ve uzunluk birimine bağlı olarak türetilmiş bir birimdir. Temel hacim birimi metreküptür ve (m^3)olarak gösterilir. Her bir kenarı 1 metre olan bir küpün hacmine 1 m^3 denir.

1.1.4. Açı Birimi

Açı: Uzayda bir noktadan çıkan iki doğrultu arasındaki açıklığa denir.

Bir noktada kesişen bu iki doğrultu bir düzlem meydana getirir. Düzlemler iki hâlde bulunur. Çekül doğrultusunu içinde bulunduran düzleme düşey düzlem, bir noktadan çıkan iki yatay doğrunun belirttiği düzlemede yatay düzlem denir. Her iki düzlemdeki yatay ve düşey açıları, ölçme aletleriyle ölçeriz. Yatay açılar saat ibresi yönünde, düşey açılar ise zenitten veya yataydan itibaren ölçülürler. Zenit başlangıç ise düşey açı adını alır. Başlangıç yatay ise eğim açısı adını alır.



Şekil 1.1: Yatay ve düşey açılar

Yatay açı: AB ve AC doğrularından geçen düşey düzlemlerin yatay düzlem ile ara kesitleri (A'B've A'C' arasında kalan) arasındaki β açısına yatay açı denir.

Düşey açı: Düşey açılar, noktalar arasındaki yükseklik farklarının hesaplanmasında ve eğik uzunlukların yatay uzunluklara dönüştürülmesinde kullanılır. Düşey açılar iki şekilde ifade edilebilir ve ölçülür. AB ve AC doğrularından geçen düşey düzlemler üzerinde A noktasından geçen düşey doğrultu (aynı zamanda iki düzlemin ara kesiti) ile AB ve AC doğruları arasındaki açılara zenit (başucu) açısı denir.

1.1.4.1. Derece

Tam bir daire çevresinin 360'ta birine 1 derece denir. 1° sembolü ile gösterilir. Derecenin 60'ta birine 1 derece dakikası, 1 derece dakikasının 60'ta birine 1 derece saniyesi denir.

$1^{\circ} = 60^{'}$ (derece dakikası (') sembolü ile gösterilir.
$1^{'} = 60''$ (derece saniyesi ('') sembolü ile gösterilir.
$1^{\circ} = 60^{'} = 3600^{''}$ ve 1 Tam açı = 360° dir.

Saniyenin daha küçük birimi ondalık sistemdir. Derece, ondalık sistemde değildir. (örneğin; $77^{\circ}\ 43^{'}\ 26^{''}$,16) Uygulamada derece cinsinden verilen açı ondalık sisteme çevrilir, sonra işlem yapılır.

$38^{\circ}\ 25^{'}\ 16^{''}$,2 açısının ondalık sisteme çevrimini inceleyiniz.

- Saniye dakikaya çevrilir ve dakikaya eklenir.

$16^{''},2 / 60 = 0^{'},27$ ise $25^{'} + 0^{'},27 = 25^{'},27$

- Dakika dereceye çevrilir ve dereceye eklenir.

$25^{''},27 / 60 = 0^{\circ},421167$ ise $38^{\circ} + 0^{\circ},421167 = 38^{\circ},421167$ olarak hesaplanır.

- İşlem bittikten sonra ondalık olarak bulunan açılar genellikle derece, dakika ve saniye olarak yazılmak istenir. Önce derecenin ondalık kısmı dakikaya çevrilir.

$0^{\circ},421167 \times 60 = 25^{'},27002$

- Sonra dakikanın ondalık kısmı saniyeye çevrilir.

$0^{'},27002 \times 60 = 16^{''},20$

Sonuçta; $38^{\circ}25^{'}16^{''}$,2 olarak açı elde edilir.

1.1.4.2. Grad (gon)

Tam bir daire çevresinin 400'de birine grad veya gon denir. 1^{g} sembolü ile gösterilir. 1 gradın 100'de birine 1 grad dakikası, 1 grad dakikasının 100'de birine 1 grad saniyesi denir. Ölçme aletlerinde ve ölçme uygulamalarında kullanılır.

$1^{g} = 100^{c}$	(grad dakikası (^{c}) sembolü ile gösterilir.
$1^{c} = 100^{cc}$	(grad saniyesi (^{cc}) sembolü ile gösterilir.
$1^{g} = 100^{cc}$	$= 10\,000^{cc}$
1 Tam açı	$= 400^{g}$ dır.

Grad açı birimi 100' lük sistemdir.
$47^{g}\ 21^{c}\ 85^{cc}$ açısı; $47^{g},2185$ şeklinde yazılır.

1.1.4.3. Milyem

Tam bir daire çevresinin 6400'de birine 1 milyem denir. $1^{=}$ sembolü ile gösterilir. Askeriyede kullanılır.

$1600^{=}$	$= 90^{\circ} = 100^{g}$
1 Tam açı	$= 6400^{=}$dir.

1.1.5. Yay Birimi (Radyan)

Yay: Herhangi bir eğrinin sınırlı bir parçasıdır. Gördüğü merkez açı ile ölçülür. Bu durumda yay birimi ile açı birimi aynı olur.

Çemberin çevresi, tüm yayın çevresine eşit olduğunda;

Tüm yay = çevre= $2\pi r$'dir.
1 Tam açı = yay / yarıçap = çevre / yarıçap = $2\pi r / r = 2\pi$ radyan
1 Tam açı = 2π radyan olur.

Tam bir daire çevresinin yarıçap uzunluğundaki yay parçasını gören merkez açıya 1 radyan denir. (R) sembolü ile gösterilir.

α_{rad} = yay / yarıçap = yay / 1 => α = yay (radyan) olur.

1.1.6. Zaman Birimi

Dünyanın kendi ekseni etrafında tam dönmesi için geçen süre zaman ölçü birimi olarak kabul edilmiştir. Zaman birimi saattir ve (h) sembolü ile gösterilir.

1 saat	= 60 dakika	(dk. veya min. sembolü ile gösterilir.)
1 dakika	= 60 saniye	(s sembolü ile gösterilir.)
1 Tam açı	= 24 saat	(h sembolü ile gösterilir.)

1.2. Birimler Arasındaki Dönüşümler

Birimler arasındaki dönüşümleri yaparken uzunluk biriminin küçük ve büyük katları ile açı birimlerinin oranlarının bilinmesi gerekir.

1.2.1. Uzunluk Birimleri Arasındaki Dönüşümler

Uzunluk ölçü birimi 10'ar 10' ar büyür, 10' ar 10'ar küçülür.

1 000 metre = 10^3 m =	1 kilometre	km
100 metre = 10^2 m =	1 hektometre	hm
10 metre = 10^1 m =	1 dekametre	dam
1 metre = 10^0 m =	1 metre	m
0,1 metre = 10^{-1} m =	1 desimetre	dm
0,01 metre = 10^{-2} m =	1 santimetre	cm
0,001 metre = 10^{-3} m =	1 milimetre	mm

Örnek 1: 3426 m olan bir yol kaç km' dir.

Kilometre metrenin üst (büyük) katıdır. Bu nedenle sağdan sola doğru 10'ar 10'ar basamaklarda kaydırma yapmalısınız.

3426 m = 342,6 dm = 34,26 hm = 3,426 km
3426 m = 3,426 km'dir.

Örnek 2: 76 m kaç mm'dir.

Milimetre metrenin ast (küçük) katıdır. Bu nedenle soldan sağa doğru 10'ar 10'ar basamaklarda kaydırma yapmalısınız.

76 m = 760 dm = 7600 cm = 76000 mm
76 m = 76000 mm' dir.

1.2.2. Alan Birimleri Arasındaki Dönüşümler

Alan ölçü birimi 100'er 100' er büyür, 100' er 100'er küçülür.

1 kilometrekare (km^2)	100 hektometrekare (hm^2)
100 hektometrekare (hm^2)	10000 dekametrekare (dam^2)
10000 dekametrekare (dam^2)	1000000 metrekare (m^2)
1 metrekare (m^2)	100 desimetrekare (dm^2)
100 desimetrekare (dm^2)	10000 santimetrekare (cm^2)
10000 santimetrekare (cm^2)	1000000 milimetrekare (mm^2)

* 100 m^2	= 1dekametre = 1 ar
* 1000 m^2	= 1 dekar = 1 dönüm
* 10 000 m^2	= 1 hektometrekare = 1 hektar

Örnek 1: Bir arsa 846 m^2 olarak ölçülmüştür. Bu arsa kaç cm^2 dir.

Alanlarda birimler 100'er 100' er büyüyüp küçüldüğü için ;

846 m^2 = 84600 dm^2 = 8460000 cm^2
846 m^2 = 8460000 cm^2 dir.

Örnek 2: 1 hektar kaç metrekaredir?

1 hektar = 1 hektometrekaredir. Hektometrekare metrenin büyük katı olduğundan;
1 hm^2 = 100 dam^2 = 10000 m^2
1 hm^2 = 10000 m^2 dir.

1.2.3. Hacim Birimleri Arasındaki Dönüşümler

Hacim ölçü birimi 1000’er 1000’ er büyür, 1000’ er 1000’er küçülür.

1 kilometreküp (km^3)	1000 hektometreküp (hm^3)
1000 hektometreküp (hm^3)	1000.000 dekametreküp (dam^3)
1000.000 dekametreküp (dam^3)	1.000.000.000 metreküp (m^3)

1 metreküp (m)	1000 desimetreküp (dm^3)
1000 desimetreküp (dm)	1000.000 santimetreküp (cm^3)
1000.000 santimetreküp (cm)	1000000000 milimetreküp (mm^3)

* 0,001 m^3 = 1 desimetreküp = 1 litre (l)

Örnek: 5274 dm^3 lük bir malzeme kaç metreküptür?

Hacim birimi 1000’er 1000’ er büyüyüp 1000’er 1000’ er küçüldüğü için;

5274 dm^3 = 5,274m^3 tür.

1.2.4. Derece Radyan Arasındaki Dönüşümler

Derece D ile radyan R ile gösterilirse

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \quad ==> \quad D = \frac{180}{\pi} \cdot R$$

Eşitliklerden yararlanarak radyanı dereceye dönüştürebiliriz.

$$\frac{180}{\pi} = p^{\circ} \quad \text{ise} \quad p^{\circ} = 57{,}295779$$ 1 radyanlık açının derece olarak değeri

$$\frac{180}{\pi''} \cdot 60 = p' \quad \text{ise} \quad p' = 3437{,}7467$$ 1 radyanlık açının derece dakikası değeri

$$\frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = p'' \quad \text{ise} \quad p'' = 206264.8044$$ 1 radyanlık açının derece saniyesi değeri

Dereceyi radyana dönüştürmek istediğimizde ise şu eşitlikleri kullanabiliriz:

$$R = \frac{D}{p^{\circ}} = \frac{D'}{p'} = \frac{D''}{p''}$$

Örnek 1: $\alpha = 39° 27' 16'',2$ açısının radyan cinsinden değerini bulunuz.

İlk önce verilen açının dakika ve saniye kısmı ondalık sisteme çevrilir.

$16'',2/60 = 0',27$; $27' + 0',27 = 27',27$

$27',27/ 60 = 0°,4545$; $39° + 0,4545 = 39°,4545$

$$R = \frac{D°}{p°} = \frac{39,4545}{57,295779} = 0,688610936 \text{ radyan}$$

Örnek 2: 1,458816 radyanın kaç derece olduğunu bulunuz.

$D = R \cdot p° \Rightarrow 1,458816 \cdot 57,295779 = 83°,58399913$

$D = 83°35' 2'',40$

1.2.5. Grad Radyan Arasındaki Dönüşümler

$$\frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \implies G = \frac{200}{\pi} \cdot R$$

Eşitliklerden yararlanarak radyanı grada dönüştürebiliriz.

$\dfrac{200}{\pi} = p^g$ ise $p^g = 63.6620$ 1 radyanlık açının grad olarak değeri

$\dfrac{200}{\pi} \cdot 100 = p^c$ ise $p^c = 6366.20$ 1 radyanlık açının grad dakikası değeri

$\dfrac{200}{\pi} \cdot 100 = p^{cc}$ ise $p^{cc} = 636620$ 1 radyanlık açının grad saniyesi değeri

Gradı radyana dönüştürmek istediğimizde ise şu eşitlikleri kullanabiliriz:

$$R = \frac{G^g}{p^g} = \frac{G^c}{p^c} = \frac{G^{cc}}{p^{cc}}$$

Örnek 1: $\alpha = 27,2564$ açısını radyan açı birimine dönüştürünüz.

$$R = \frac{G^g}{p^g} = \frac{27,2564}{63,6620} = 0,428142 \text{ radyan olur.}$$

Örnek 2: A=18^c lık açının radyan değerini bulunuz.

$$R = \frac{G^c}{P^c} = \frac{18^c}{6366,20} = 0,00283 \text{ radyan olur.}$$

Örnek 3: 0,086752 radyanın grad olarak karşılığını bulunuz.

$$G^g = p^g \cdot R = 63,6620 \cdot 0,086752 = 5^g,5228$$

Örnek 4: Yarıçapı r = 240 m olan bir çemberde, α = 14^g lık merkez açıya karşılık gelen yay uzunluğunu bulunuz.

$$R = \frac{G^g}{p^g}$$ eşitliğinde R yerine yay/r yazılırsa

$$\frac{yay}{r} = \frac{G^g}{p^g} \Longrightarrow yay = \frac{14}{63,6620} \cdot 240 = 52,78 \text{ m}$$

1.2.6. Derece Grad Arasındaki Dönüşümler

Derece grad arasındaki dönüşümlerde orantı ve katsayı yöntemleri kullanılır.

1.2.6.1. Orantı Yöntemi

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200}$$ veya $D^\circ = 0,9 \cdot G^g$; $G^g = \frac{10}{9} \cdot D^\circ$ eşitlikleri kullanılır.

1.2.6.2. Katsayı Yöntemi

$9° = 10^g$; $1^g = 0°,9$
$1° = 1^g,11111111$; $1^c = 0'.54$
$1' = 1^c,85185185 = 0^g,0185185$; $1^{cc} = 0''.324$
$1'' = 3^{cc},0864 = 0^g,0003086$

Katsayıları ile dönüşümler yapılır.

Örnek: $\alpha = 83^g\ 25^c\ 16^{cc},3$ açısını her iki yöntemle dereceye dönüştürünüz.

Orantı yöntemi ile

$$D = 0,9 \cdot G = 0,9 \cdot 83^g,25163 = 74^\circ,926467 = 74°55'35'',28$$

Katsayı yöntemi ile

83^g	$= 0,9 \cdot 83$	$= 74°,7$	$= 74°42''$
25^c	$= 0,54 \cdot 25$	$= 13',5$	$= 13'30''$
$16^{cc},3$	$= 0,324 \cdot 16,3$	$= 5'',2812$	$= 05'',28$
$83^g\,25^c\,16^{cc},3$			$= 74°55'35'',28$

1.2.6.3. Elektronik Hesap Makinesi Yöntemi

Elektronik hesap makinelerinde, 60 dakikalık sayıları 100 grad dakikasına çeviren özel tuşlar sayesinde verilen açının dakika ve saniyesi, derece birimine çevrilir. Sonra 10/9 ile çarpılarak derece grada dönüşmüş olur.

Gradı dereceye dönüştürürken, grad olarak verilen açı 0,9 ile çarpılır. Elde edilen değer sırası ile elektronik hesap makinesinde ters işlem tuşu **INV** veya **SHIFT** ile **° ' ''** tuşuna basılarak sonuç derece cinsinden bulunur.

1.2.7. Zaman Birimi İle Derece Arasındaki Dönüşümler

Astronomi biliminde genellikle şu dönüşümler kullanılır:

$$\frac{Z^h}{24} = \frac{D^\circ}{360} \quad \text{veya} \quad D^\circ = 15 \cdot Z^h \quad ; \quad Z^h = \frac{D^\circ}{15}$$

Ayrıca şu eşitlikler de mevcuttur:

$1^{sa} = 1^h = 15°$; $4^{dak} = 1°$

$1^{dak} = 1^m = 15'$; $4^s = 1'$

$1^s = 1^s = 15''$; $\frac{1}{15}\, s = 1''$

UYGULAMA FAALİYETİ

Kuralına uygun ölçü birimlerini ve dönüşümlerini yapınız.

1. Bir yol 255 km'dir. Bu yol kaç cm'dir?
2. 35 hm^2 olan bir alan kaç m^2 dir?
3. 1000000 cm^3 kaç km^3 tür?
4. α=1,76006 radyanlık açının derece ve grad cinsinden değerini bulunuz.

İşlem Basamakları	**Öneriler**
➢ Uzunluk birimleri arasındaki dönüşümleri yapınız.	➢ Uzunluk ölçü biriminin 10'ar 10' ar büyüyüp 10' ar 10'ar küçüldüğünü hatırlayınız.
➢ Alan birimleri arasındaki dönüşümleri yapınız.	➢ Alan ölçü biriminin 100'er 100' er büyüyüp 100' er 100'er küçüldüğünü hatırlayınız.
➢ Hacim birimleri arasındaki dönüşümleri yapınız.	➢ Hacim ölçü biriminin 1000'er 1000' er büyüyüp 1000' er 1000'er küçüldüğünü hatırlayınız.
➢ Derece-radyan arasındaki dönüşümleri yapınız.	➢ $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ ==> $D = \frac{180}{\pi} \cdot R$ eşitliklerinden yararlanınız.
➢ Grad-radyan arasındaki dönüşümleri yapınız.	➢ $\frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$ ==> $G = \frac{200}{\pi} \cdot R$ eşitliklerinden yararlanınız.
➢ Derece-grad arasındaki dönüşümleri yapınız.	➢ Derece grad arasındaki dönüşümlerde orantı ve katsayı yöntemlerini kullanınız.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

	Değerlendirme Ölçütleri	**Evet**	**Hayır**
1	Uzunluk birimleri arasındaki dönüşümleri yaptınız mı?		
2	Alan birimleri arasındaki dönüşümleri yaptınız mı?		
3	Hacim birimleri arasındaki dönüşümleri yaptınız mı?		
4	Derece-Radyan arasındaki dönüşümleri yaptınız mı?		
5	Derece-Grad arasındaki dönüşümleri yaptınız mı?		
6	Grad-Radyan arasındaki dönüşümleri yaptınız mı?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

1. Bir yol 223 km'dir. Bu yol kaç m'dir?
A) 2230 B) 22300 C) 223000 D) 2230000

2. 5,2 m boyu olan bir direk kaç cm'dir?
A) 52 B) 520 C) 5200 D) 52000

3. Bir arsa 648 m^2 ölçülmüştür. Bu arsa kaç dekametredir?
A) 64,8 B) 6,48 C) 6480 D) 64800

4. 0,83 km^2 olan bir alan kaç m^2 dir?
A) 830000 B) 83000 C) 8300 D) 830

5. Hesaplanan ahşap malzeme 3785 dm^3 tür. Bu malzeme kaç m^3 tür?
A) 378,5 B) 37,85 C) 3,785 D) 0,3785

6. 960 cm^3 kaç m^3 tür ?
A) 9,60 B) 0,0960 C) 0,00960 D) 0,000960

7. α=25°18'58" olduğuna göre α açısının radyan cinsinden değerini hesaplayınız.
A) 0,442 B) 0,465 C) 0,473 D) 0,350

8. α=4,17896 radyanlık açının derece cinsinden değerini bulunuz.
A) 25°26'12",3 B) 239°26'12",3 C) 239°59'45" D) 239°2612.5

9. Bir çember üzerindeki 5 m'lik yay uzunluğuna α= 25' lik merkez açı karşılık geliyorsa bu çemberin yarıçapı (r) kaç m'dir?
A) 6,875 B) 6875 C) 687,5 D) 68,75

10. Yarıçapı= 315 m olan bir çemberde α= 16^g lık bir merkez açısına karşılık gelen yay uzunluğunu bulunuz.
A) 7,9168 B) 79,168 C) 791,68 D) 79

11. Çıkarma işleminin sonucu nedir?

$$\begin{array}{r} 98^g\ 76^c\ 63^{cc} \\ -\ 62^g\ 36^c\ 15^{cc} \\ \hline \end{array}$$

A) $36\ ^g40\ ^c78^{cc}$ B) $37^g\ 40\ ^c48^{cc}$ C) $37\ ^g40\ ^c48^{cc}$ D) $36\ ^g40\ ^c48^{cc}$

12. $5^h\ 48^m\ 25^s$ + $3^h\ 38^m\ 52^s$

Toplama işleminin sonucu nedir?

A) $8^h\ 76^m\ 77^s$ B) $9^h\ 27^m\ 17^s$ C) $8^h\ 27^m\ 17^s$ D) $9^h\ 76^m\ 17^s$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–2

AMAÇ

Trigonometrik fonksiyonları kuralına uygun kullanabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

- Trigonometrik fonksiyonların mesleğimizdeki önemini araştırınız. Edindiğiniz bilgileri sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.

2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bir üçgende altı temel elemandan biri kenar olmak koşulu ile üçü belli iken diğer elemanlarını hesaplamaya yarayan trigonometrik bağıntılardan ve üçgenlerin çözümünden bahseden matematik dalıdır.

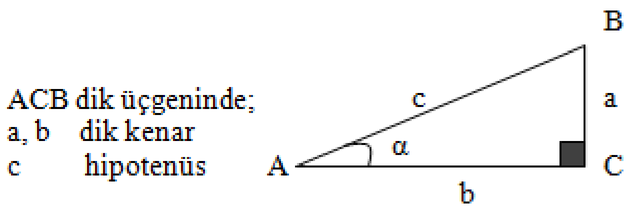
Trigonometri, üçgenlerin kenar ve açılarının bağıntılarını araştırır. Çok kenarlı şekillerin açı ve kenarlarını hesaplar. Bu hesaplamalarda trigonometrik fonksiyonlardan faydalanılır. Geometride çizim yolu ile çözülen problemler, trigonometride hesap yolu ile çözülür. Özellikle çok büyük veya küçük uzunlukların, küçük açıların bulunmasında çizim yolu pek doğru sonuç vermediğinden trigonometrik hesaplamalar yapılır.

2.1. Trigonometrinin Meslekteki Yeri ve Önemi

Trigonometriden mesleğimizde arsa veya arazi alanlarının hesaplanmasında; yeryüzünde tesis edilen nirengi, poligon, nivelman gibi yer kontrol noktalarında; nivo, teodolit ve elektronik uzunluk ölçü aletleriyle yapılan doğrultu, kenar ve yükseklik ölçülerinin değerlendirilmesinde yararlanılır.

2.2. Trigonometrik Fonksiyonların Tanımı

ACB dik üçgeninde bir dar açının trigonometrik fonksiyonları bir dar açı ile dik üçgenin herhangi iki kenarı arasındaki bağıntıyı gösterir. Dik açı ile birleşen kenarlara dik kenar; dik açının karşısındaki kenara hipotenüs denir.



Şekil 2.1: ABC dik üçgeni

2.2.1. Sinüs Fonksiyonu

α dar açısının sinüsü, karşıdaki dik kenarın hipotenüse oranına eşittir. Bu sabit orana α açısının sinüsü denir.

$$\text{Sin } \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

2.2.2. Kosinüs Fonksiyonu

α dar açısının kosinüsü, komşu dik kenarın hipotenüse oranına eşittir. Bu sabit orana α açısının kosinüsü denir.

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

2.2.3. Tanjant Fonksiyonu

α dar açısının tanjantı, karşı dik kenarın komşu dik kenara oranına eşittir. Bu sabit orana α açısının tanjantı denir.

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar}}{\text{Komşu dik kenar}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

2.2.4. Kotanjant Fonksiyonu

α dar açısının kotanjantı, komşu dik kenarın karşı dik kenara oranına eşittir. Bu sabit orana α açısının kotanjantı denir.

$$\text{Cotg } \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar}}{\text{Karşı dik kenar}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

2.3.Tümler Açının Trigonometrik Fonksiyonu

ACB dik üçgeninde α ve β açıları,

$\alpha + \beta = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ radyan olduğundan tümler açılardır.

Buna göre şekil 2.1'den,

$$\text{Sin } \alpha = \frac{a}{c} = \text{Cos } \beta \quad ; \quad \text{Cotg } \alpha = \frac{b}{a} = \text{tg } \beta$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{b}{c} = \text{Sin } \alpha \quad ; \quad \text{Sec } \alpha = \frac{c}{b} = \text{cosec } \beta$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \text{cotg } \beta \quad ; \quad \text{Cosec } \alpha = \frac{c}{a} = \text{Sec } \beta$$

Bu bağıntılarda β yerine ;

$(90^\circ - \alpha)$, $(100^g - \alpha)$ veya $\left[\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right]$ eşiti konursa

$$\text{Cos } (90^\circ - \alpha) = \cos (100^g - \alpha) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \text{Sin } \alpha$$

$$\text{Sin } (90^\circ - \alpha) = \text{Sin } (100^g - \alpha) = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \cos \alpha$$

$$\text{tg } (90^\circ - \alpha) = \text{tg } (100^g - \alpha) = \text{tg } \left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \text{cotg } \alpha$$

$$\text{cotg } (90^\circ - \alpha) = \text{cotg } (100^g - \alpha) = \text{cotg } \left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \text{tg } \alpha$$

$$\sec (90^\circ - \alpha) = \sec (100^g - \alpha) = \sec \left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \text{cosec } \alpha$$

$$\text{cosec } (90^\circ - \alpha) = \text{cosec } (100^g - \alpha) = \text{cosec } \left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \sec \alpha$$

bağıntıları elde edilir.

Bu bağıntılardan görüldüğü gibi birbirlerini $90^{\circ} = 100^{g} = \pi/2$'ye tamamlayan iki açıdan birinin trigonometrik fonksiyonlarına (sin, cos, tg, cotg, sec, cosec) karşılık gelen, diğerinin trigonometrik kofonksiyonlarına (cos, sin, cotg, tg, cosec, sec) eşit olmaktadır.

Yani sinüsün kofonksiyonuna kosinüs; kosinüsün kofonksiyonuna sinüs karşılık gelmektedir.

Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

$\alpha = 70^{g}$ ve $\beta = 30^{g}$ veriliyor ise

$\text{Sin}70^{g} = \cos 30^{g}$; $\text{tg}70^{g} = \text{cotg}30^{g}$; $\text{cosec}70^{g} = \sec 30^{g}$' dir.

Örnek: sin 32° = cos α ise α dar açısının değerini bulunuz.

32°' lik açı yerine eşiti (90°-58°)' lik açı yazılıp

Sin (90°-α) = cos α bağıntısına göre;

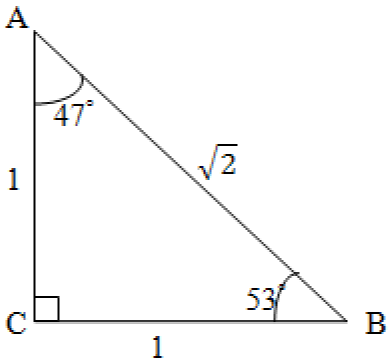
Cosα = sin32° = sin (90°-58°) = cos 58° yazılabilir.

Tümler açı burada α = 58° olur.

UYGULAMA FAALİYETİ

Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonların kullanımını yapınız.

1. Dik üçgene göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



a) sin 53°=?
b) tg 47°=?
c) cos 47°=?
d) cotg 53°=?

2. cos(90°-α)= sin34° verildiğine göre α açısının değeri nedir?

İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Sinüs fonksiyonu ile ilgili hesaplamalar yapınız.	➢ Sinüs sabit oranından faydalanınız.
➢ Kosinüs fonksiyonu ile ilgili hesaplamalar yapınız.	➢ Kosinüs sabit oranından faydalanınız.
➢ Tanjant fonksiyonu ile ilgili hesaplamalar yapınız.	➢ Tanjant sabit oranından faydalanınız.
➢ Tümler açıları kullanarak hesaplamalar yapınız.	➢ Dik üçgen olması gerektiğini hatırlayınız.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		Evet	Hayır
1	Sinüs fonksiyonunu ile ilgili hesaplamalar yaptınız mı?		
2	Kosinüs fonksiyonunu ile ilgili hesaplamalar yaptınız mı?		
3	Tanjant fonksiyonunu ile ilgili hesaplamalar yaptınız mı?		
4	Tümler açıları kullanarak hesaplamalar yaptınız mı?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda “Hayır” şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız “Evet” ise “Ölçme ve Değerlendirme”ye geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

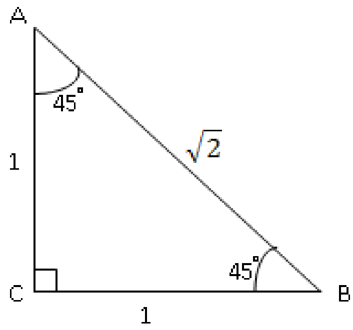
1. Sin42° = cosα dar açısının değeri aşağıdakilerden hangisidir?
A) 42° B) 48° C)52° D)58°

2. sin(90°-α)= cos22° verildiğine göre α açısı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 78° B)68° C)22° D)18°

3. sin30° + X= cosX eşitliği veriliyor. X dar açısı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 30° B)60° C)90° D)180°

4. sin32°= cosX verildiğine göre X açısı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 32° B)38° C)48° D)58°

Aşağıdaki dik üçgene göre aşağıdaki soruları çözünüz.



5. Sin 45° nin değeri kaçtır?
A) 1/2 B)1 C)2 D) $1/\sqrt{2}$

6. cos45° nin değeri kaçtır?
A) 1 B)2 C) 1/2 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. tg 50^g ın değeri nedir?
A) $\sqrt{2}$ B)1 C) 1/2 D d) $1/\sqrt{2}$

8. sin 50^g ın değeri nedir?
A) 1 B)2 C) 1/2 D) $1/\sqrt{2}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–3

AMAÇ

Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntıları kuralına uygun olarak kurabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

- Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntıların mesleğimizdeki gerekliliğini araştırınız. Edindiğiniz bilgileri sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

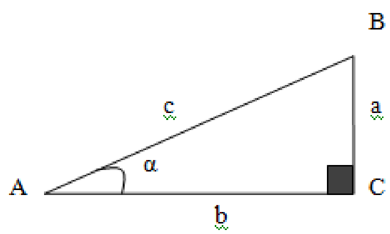
3.TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR VE HESAPLAMALAR

3.1. Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar

Trigonometrik fonksiyonların tanımından faydalanarak bu fonksiyonların çözümünde çok önemli olan bağıntıları şekle göre şöyle çıkartabiliriz.

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{a}{c} \;;\; \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \;;\; \text{Sec}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{b}{c} \;;\; \text{Cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} \;;\; \text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}$$



Şekil 3.1: Dik üçgen

Bu tanımlardan faydalanarak

$$\text{Sin } \alpha = \frac{1}{\text{cosec } \alpha} \; ; \; \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{Sin } \alpha} \implies \text{Sin } \alpha \;.\; \text{cosec } \alpha = 1$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{1}{\text{Sec } \alpha} \; ; \; \text{Sec } \alpha = \frac{1}{\text{Cos } \alpha} \implies \text{cos } \alpha \;.\; \text{sec } \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{cotg } \alpha} \; ; \; \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \implies \text{tg } \alpha \;.\; \text{cotg } \alpha = 1$$

$$\frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos } \alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \text{tg } \alpha \implies \text{tg } \alpha = \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos } \alpha}$$

$$\frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sin}\alpha} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = \text{cotg } \alpha \implies \text{cotg } \alpha = \frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sin}\alpha}$$

bağıntıları elde edilir. Ayrıca trigonometrik fonksiyonların tanımlarından

$\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = a^2/c^2 + b^2/c^2 = (a^2 + b^2) / c^2$ eşitliği yazılır.

Şekil 3.1'deki ACB dik üçgeninde, Pisagor teoremini yazarsak $a^2 + b^2 = c^2$ bu eşitliği

$\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = a^2/c^2 + b^2/c^2 = (a^2 + b^2) / c^2$ formülünde yerine koyarsak

$\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$ bağıntısı bulunur. Bu bağıntının her iki tarafını bir defa $\text{Cos}^2 \alpha$,

bir defa da $\text{Sin}^2 \alpha$ ile bölersek

$\text{Tg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\text{Cos}^2 \alpha}$ ve $\text{cotg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$ elde edilir.

Ayrıca $\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$ bağıntısı yardımıyla

$\text{Sin}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ve $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ bağıntıları elde edilmiş olur.

$\text{tg } \alpha = \text{Sin}\alpha / \text{Cos } \alpha$ bağıntısının her iki tarafının karesi alınıp 1 ilave edilirse

$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + \dfrac{\text{Sin}^2 \alpha}{\text{Cos}^2 \alpha}$ olur. Sağ tarafın paydası eşitlenirse

$1 + tg^2\ \alpha = (\ Sin^2\ \alpha + Cos^2\ \alpha\ )\ /\ Cos^2\ \alpha$ olur.

Burada $Sin^2\ \alpha + Cos^2\ \alpha = 1$ bağıntısı yerine konursa

$tg^2\ \alpha + 1 = \dfrac{1}{Cos^2\ \alpha} = Sec^2\ \alpha$ benzer yolla da $cotg^2\ \alpha + 1 = \dfrac{1}{sin^2\ \alpha} = cosec^2\ \alpha$

bağıntıları elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonlar arasında kurulan bağıntılara genel olarak trigonometrik özdeşlik denir. Bu nedenle tanımlanan trigonometrik fonksiyonlar arasında kurulmuş olan bağıntılara temel trigonometrik özdeşlikler olarak bakılabilir.

Özdeşliklerin doğruluğunu göstermek, verilen özdeşliğin sadece sol tarafını alıp bunu bilinen trigonometrik bağıntılar yardımıyla değiştirerek özdeşliğin diğer tarafına aynen benzetmek demektir.

Örnek 1:

$tg\alpha\ .\ \cos\alpha = sin\alpha$ olduğunu gösteriniz.

$tg\alpha = sin\alpha\ /\ cos\alpha$ ve $cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ' dır.

Bunlar verilen eşitliğin sol tarafında yerine konulup gerekli sadeleştirme yapıldığında

$tg\ \alpha\ .\ \sqrt{1-\sin^2\alpha} = sin\ \alpha\ /\ cos\ \alpha\ .\ cos\ \alpha = sin\ \alpha$ verilen eşitliğin sağ tarafında Sinα

bulunduğunda özdeşliğin doğruluğu gösterilmiş olur.

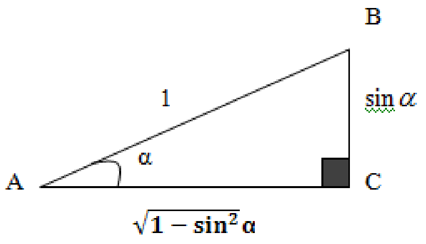
3.2. Trigonometrik Fonksiyonların Biri Belli İken Diğerlerinin Hesaplanması

- **Sinüs bilindiğine göre:**

ACB dik üçgeninde, sin α belli ise Hipotenüs = AB = 1 birim alınırsa

$\sin\alpha = BC\ /\ AB = BC\ /\ 1 = BC$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$



Şekil 3.2: Dik üçgen

Böylece üç kenarı belli olan dik üçgende;

tgα = BC / AC = sinα / $\sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}}$; cotgα = AC / BC = $\sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}}$ / sinα

secα = AB / AC = 1 / $\sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}}$; cosecα = AB / AC = 1 / sinα

Örnek :sin α = 0,5 ===> cos α, tg α, cotg α, sec α, cosec α değerlerini bulalım.

$$\cos\alpha = \sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{\mathbf{1-0,5^2}} = \sqrt{\mathbf{1-0,25}} = \sqrt{\mathbf{0,75}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{0,75} = 0,866025$$

$$\sec\alpha = AB/AC = 1/\sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}} \;;\; \mathrm{cosec}\,\alpha = AB/AC = 1/\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha \,/\, \sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}} = 0,5 \,/\, \sqrt{0,75} = 0,577350$$

$$\mathrm{cotg}\alpha = \sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}} \,/\, \sin\alpha = \sqrt{0,75} \,/\, 0,5 = 1,732051$$

$$\sec\alpha = 1/\sqrt{\mathbf{1-\sin^2\alpha}} = 1 \,/\, \sqrt{0,75} = 1,154701$$

cosecα= 1 / sinα = 1 / 0,5 = 2 olur.

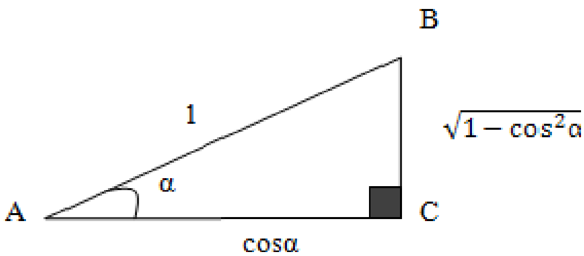
- **Kosinüs bilindiğine göre:**

-

ACB dik üçgeninde, cosα belli ise

Hipotenüs = AB = 1 birim alınırsa

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{1} = AC$$



Şekil 3.3: Dik üçgen

BC= $\sqrt{\mathbf{1-\cos^2\alpha}}$ (Pisagor teoreminden yola çıkarak)

sin = BC / AB = $\sqrt{\mathbf{1-\cos^2\alpha}}$ / 1 = $\sqrt{\mathbf{1-\cos^2\alpha}}$

tg= BC / AC = $\sqrt{\mathbf{1-\cos^2\alpha}}$ / cosα , cotgα = AC / BC = cosα / $\sqrt{\mathbf{1-\cos^2\alpha}}$

secα= AB / AC = 1 / cosα , cosecα = AB / BC = 1 / $\sqrt{\mathbf{1-\cos^2\alpha}}$

Örnek :cosα = $\sqrt{3}$/ 2$\Longrightarrow$ sinα, cosα, cotgα, secα, cosecα değerlerini bulalım.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

tgα= $\sqrt{\mathbf{1-cos^2\alpha}}$ / cosα = 0,5 / $\sqrt{3}$ / 2 = 1 / $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ / 3

cotgα= cosα/ $\sqrt{\mathbf{1-cos^2\alpha}}$ = $\sqrt{3}$ / 2 / **0,5** = $\sqrt{3}$ / 1= $\sqrt{3}$

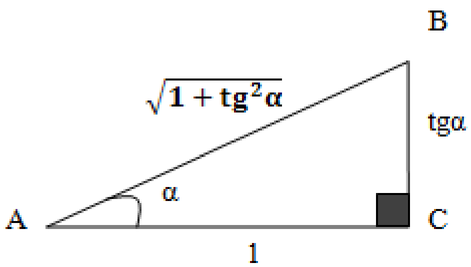
secα= 1 / cosα = 1 / $\sqrt{3}$ / 2 = 2 / $\sqrt{3}$ = **2**$\sqrt{3}$ / 3

cosecα= 1/ $\sqrt{\mathbf{1-cos^2\alpha}}$ = 1 / 0,5 = 2 olur.

- **Tanjant bilindiğine göre:**

ACB dik üçgeninde tg α belli ise

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} = BC$$



Şekil 3.4: Dik üçgen

AB = $\sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}}$ olur.

sinα= BC / AB = tgα / $\sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}}$; cosα = AC / AB = 1 / $\sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}}$

cotgα= AC / BC = 1 / tgα ; secα= AB / AC = $\sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}}$ /1

cosecα= AB / BC = $\sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}}$ / tgα olur.

Örnek : tgα= $\sqrt{\mathbf{3}}$ / 3 => sinα, cosα, cotgα, secα, cosecα değerlerini bulalım.

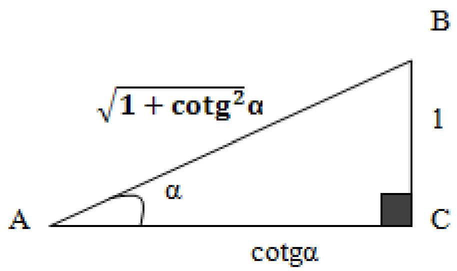
$$\sin\alpha = \text{tg}\alpha \,/\, \sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 \,/\, \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}\,/\,2 \qquad \text{cotg}\alpha = 1 \,/\, \text{tg}\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\mathbf{3}}$$

$$\sec\alpha = \sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}} = 2\sqrt{\mathbf{3}}\,/\,3 \qquad \text{cosec}\alpha = \sqrt{\mathbf{1+tg^2\alpha}} \,/\, \text{tg}\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 \text{ olur.}$$

ACB dik üçgeninde, cotg α belli ise

$$\text{Cotg } \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{1} = AC$$



Şekil 3.5: Dik üçgen

AB = $\sqrt{\mathbf{1+cotg^2\alpha}}$ olur.

sinα= BC / AB = 1 / $\sqrt{\mathbf{1+cotg^2\alpha}}$; cosα = AC / AB = cotgα / $\sqrt{\mathbf{1+cotg^2\alpha}}$

tgα = BC / AC = 1 / cotgα ; secα = AB / AC = $\sqrt{\mathbf{1+cotg^2\alpha}}$ / cotgα

cosecα= AB / AC = $\sqrt{\mathbf{1+cotg^2\alpha}}$ olur.

Örnek : $\cot g\alpha = \sqrt{3}$ ise sinα, cosα, cotgα, secα, cosecα, değerlerini bulalım.

sinα= $1 / \sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha} = 1 / \sqrt{1+3} = 1 / \sqrt{4} = 1/2$

cosα=cotg $/ \sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha} = \sqrt{3} / \sqrt{1+3} = \sqrt{3} / \sqrt{4} = \sqrt{3}/2$

tgα=1 / cotgα $= 1 / \sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

secα= $\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}$ / cotgα $= \sqrt{1+3} / \sqrt{3} = \sqrt{4} / \sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$

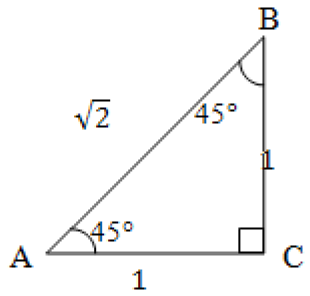
cosecα= $\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ olur.

Verilen / Aranan	sinα	cosα	tgα	cotgα
sinα	sinα	$\sqrt{1+\cos^2\alpha}$	$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
cosα	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	cosα	$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\mathrm{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
tgα	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	tgα	$\frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha}$
cotgα	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$	cotgα

Tablo 3.1: Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntılar

3.3.Özel Açıların Trigonometrik Fonksiyonlarının Hesabı

3.3.1. Açı 45 Derece



Dik kenarları bir birim kabul edilen ACB ikizkenar dik üçgen çizilir (45–45–90 üçgeni).

AB = BC = 1 alınırsa

AB = $\sqrt{\mathbf{AC^2 + BC^2}} = \sqrt{\mathbf{2}}$ bulunur.

(Pisagor teoreminden hareketle).

ACB ikizkenar dik üçgeninde taban açıları 45° olacağından (π=180^0)

sin45° = sin π / 4 = 1 / $\sqrt{\mathbf{2}}$ = $\sqrt{\mathbf{2}}$ / 2 = 0,707 ; tg45° = tg π / 4 = 1

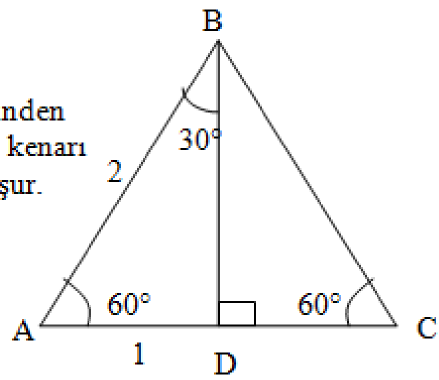
cos45° = cos π / 4 = 1 / $\sqrt{\mathbf{2}}$ = $\sqrt{\mathbf{2}}$ / 2 = 0,707 ;cotg45° = cotg π / 4 = 1

Şekil 3.6: Dik üçgen

3.3.2. Açı 30 Derece

Kenar uzunlukları 1 birim kabul edilen ABC eşkenar üçgen çizilir. Bu üçgenin B köşesinden tabana BD diki inilirse B köşesindeki açı ve AC kenarı iki eşit parçaya bölünür, (30-60-90) üçgeni oluşur.

Şekil 3.7' de olduğu gibi AB = 2 ve AD = 1 alınırsa



Şekil 3.7: Eşkenar üçgen

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ bulunur.

(Pisagor teoreminden hareketle).

ABD dik üçgeninden istenilen açıların trigonometrik değerleri (π=180^0)

sin30° = sin π / 6 = 1 / 2 = 0,5 ; sin60° = sin π / 3 = $\sqrt{3}$ / 2 = 0,866

cos30° = cos π / 6 = $\sqrt{3}$ / 2 = 0,866; cos60° = cos π / 3 = 1 / 2 = 0,5

tg30° = tg π / 6 = 1 / $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ / 3 = 0,577 ; tg60° = tg π / 6 = $\sqrt{3}$ = 1,732

cotg30° = cotg π / 6 = $\sqrt{3}$/ 1 = $\sqrt{3}$ = 1,732 ; cotg60° =cotg π/3 = 1/$\sqrt{3}$ =$\sqrt{3}$/3 = 0,577

3.3.3 Açı 60 Derece

30° ile 60° açıları birbirlerinin tümleri olduğundan biri bulunduktan sonra diğeri de bulunur.

Örnek: sin60°= cos30°=$\sqrt{3}$ / 2 =0,866 tg60° = cotg30°=$\sqrt{3}$= 1,732

cos60°=sin30°= 1 / 2 =0,5 cotg60° = tg30° = 1 / $\sqrt{3}$= 0,577

Açı / Tri. Fonk.	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	1 / 2	$\sqrt{2}$ / 2	$\sqrt{3}$ / 2	1
cosα	1	$\sqrt{3}$ / 2	$\sqrt{2}$ / 2	1 / 2	0
tgα	0	$\sqrt{3}$ / 3	1	$\sqrt{3}$	∞
cotgα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$ / 2	0

Tablo 3.2: Birinci bölgede bulunan bazı açıların trigonometrik değerleri

Örnek 1: sin42° ye yaklaşık gelen cos değeri nedir?

sin42° = cos (90°-42°)' dir. Böylece; sin42° = cos48° olur.

Örnek 2: Bir dik üçgende tanx = $\dfrac{3}{4}$ olduğuna göre cotgx + sinx + cosx kaçtır?

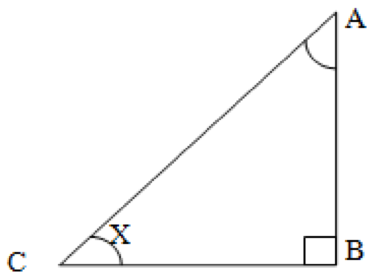
Sinüs ve kosinüs değerlerini bulmak için önce bir dik üçgen çizip dar açılardan birinin ölçüsüne X diyelim.

Tgx = 3 / 4 verilmiş. Buna göre tgx = 3 / 4 = |AB| / |BC| dir.

Buradan |AB| = 3 birim alırsak |BC| = 4 birim olur.
|AC| hipotenüs olduğundan (Pisagor teoreminden).

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$|AC|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = |AC| = 5$ birim olur.



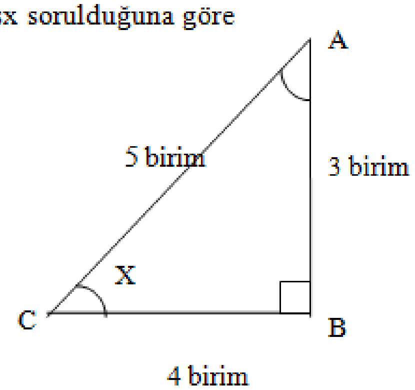
Şekil 3.8: Dik üçgen

Bu durumda,

sinx = 3 / 5 ve cosx = 4 / 5 olur. cotgx + sinx +cosx sorulduğuna göre

3 / 4 + 3 / 5 + 4 / 5 ise paydaları eşitlersek

=(20+9+12) / 15 = 41 / 15 bulunur.



Şekil 3.9: Dik üçgen

Örnek 3: sinA = cosA olduğuna göre A açısının ölçüsü kaç derecedir?

Sinüsü kosinüsüne eşit olan tek açı 45° lik açıdır.

Örnek 4: Sin45° x cos54° x tg30° / cotg60° x sin 36° x cos45° işleminin sonucu kaçtır?

Birbirini 90° ye tamamlayan açıların sinüsleri kosinüslerine; tanjantları da kotanjantlarına eşittir.

$\sin 45° = \cos 45°$ $\cos 54° = \sin 36°$ $tg 30° = cotg 60°$ olduğundan

$\sin 45° \times \cos 54° \times tg 30° / cotg 60° \times \sin 36° \times \cos 45° = 1$ olur.

UYGULAMA FAALİYETİ

Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonlar arasında bağıntıları yapınız.

$\frac{1}{tg\alpha} * \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$ olduğunu gösteriniz.

$\sin\alpha = \frac{8}{10}$ ise cosα=? tgα=? cotgα=? secα=? cosecα=?

sin 30^o=1/2 ise cos 60^o=?

İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Özdeşliklerin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Verilen özdeşliğin sadece sol tarafını alıp bunu bilinen trigonometrik bağıntılar yardımıyla değiştirerek özdeşliğin diğer tarafını benzetiniz.
➢ Trigonometrik fonksiyonların biri belli iken diğerlerini hesaplayınız.	➢ $\sin\alpha$ değeri verildiğine göre cosα, tgα, cotgα, secα ve cosecα' yı hesaplayınız.
➢ Özel açıların trigonometrik fonksiyonlarının hesabını yapınız.	➢ 30° ile 60° açıları birbirlerinin tümleri olduğunu hatırlayınız.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		Evet	Hayır
1	Özdeşliklerin doğruluğunu gösterdiniz mi?		
2	Trigonometrik fonksiyonların biri belli iken diğerlerini hesapladınız mı?		
3	Özel açıların trigonometrik fonksiyonlarının hesabını yaptınız mı?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

1. sinα = 0,6 olduğuna göre tgα'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A)0,8 B)0,75 C)1,33 D)1,25

2. cosα $=\sqrt{5}/3$ olduğuna göre sinα'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$

3. tg $\alpha = 2\sqrt{2}$ ==> cosα'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ B) 3 C) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ D) $\dfrac{1}{3}$

4. cotgα = 3 ==> cosecα'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{10}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5. $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ ==> cos60° nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A)2 B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

6. $tg60° = \sqrt{3}$ ==> cotg30° nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1

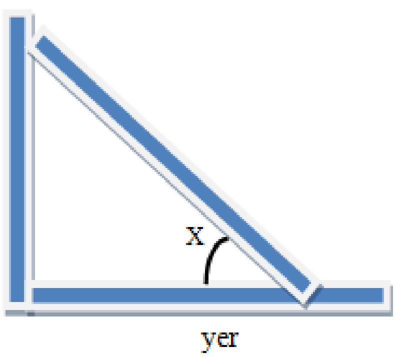
7. 0< s(x) < 90° ve tgx= 0,5 ==> cotgx' nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A)1 B)2 C)3 D)4

Şekilde merdiven yer düzlemi ile x derecelik açı oluşturacak şekilde duvara yaslanıyor.

$\text{Sinx} = \dfrac{4}{5}$ olarak verilmiştir. Bu verilere göre

.



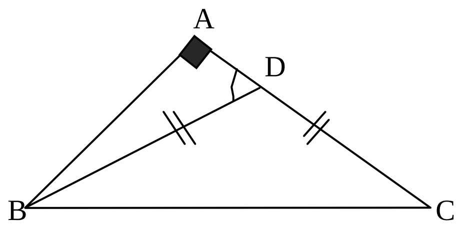
8.. Merdiven tepe noktasının yerden yüksekliği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2,5 B) 2,8 C)3,2 D) 4

9.. 0< s(x) < 90° ve cosx = 5/13 ==> tgx aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 12/5 C) 5/8 D) 3/5

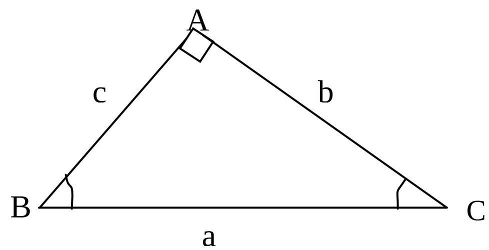
10.. Şekildeki ABC dik üçgeninde s(BAC) = 90° ve |BD| = |DC| tg(ADB) = 4/5 => tg (ACB) kaçtır?



A) 4/5 B) 2/3

C) 3/5 D) 1/2

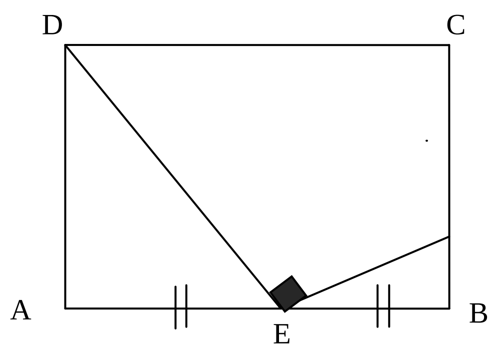
11.. Şekildeki ABC üçgeninde |AB| ⊥ |AC| dir. a, b ve c bulundukları kenarların uzunlukları olduklarına göre sinB + sinC ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) 2c / a B) 2b / a

C) b+c / a D) b x c / a

12.. Şekilde ABCD karesinde |AE| = |EB| ve |DE| ⊥ |EF| => FEB üçgeninde cos(EFB) değeri kaçtır?



A) 1/3 B) 1 / 2

C) 1/ $\sqrt{5}$ D)1/$\sqrt{5}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖĞRENME FAALİYETİ–4

AMAÇ

Trigonometrik fonksiyonlarla ilgili teoremleri kuralına uygun uygulayabileceksiniz.

ARAŞTIRMA

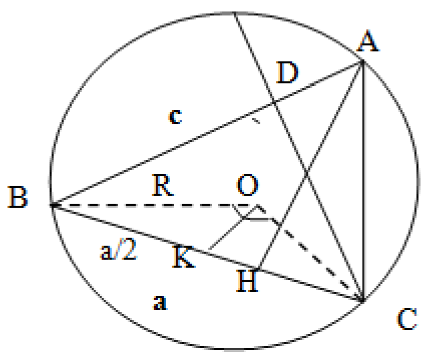
- Trigonometrik fonksiyonlarla ilgili teoremleri araştırınız. Edindiğiniz bilgileri sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.

4. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARLA İLGİLİ TEOREMLER

4.1. Sinüs Teoremi

Teorem : Bir ABC üçgeninde kenarlar, karşılarındaki açıların sinüsleri ile orantılıdır ve bu oran çevrel çemberin çapına eşittir.

İspat : R çevrel çemberin yarıçapı, 2R çevrel çemberin çapı olsun. Şekildeki ABC üçgeninde A ve C köşelerinden karşı kenarlara AH ve CD dikleri inelim. AH diki ile oluşan ABH ve AHC dik üçgenlerinden,



Şekil 4.1: Çevrel çember

AH = c x sinB = b x sinC yazılabilir.

Bu eşitliğin her iki tarafını sinB x sinC’ye böler ve sadeleştirirsek

$$\frac{c \times \sin B}{\text{SinBxsinC}} = \frac{b \times \sin C}{\text{sinBxsinC}} \implies \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \text{ bulunur.}$$

Aynı şekilde CD diki ile oluşan ADC ve BDC dik üçgenlerinden,

CD = b x sinA =a x sinB yazılabilir.

Bu eşitliğin her iki tarafını sinA x sinB'ye bölersek

$$\frac{b \times \sin A}{\text{SinAxsinB}} = \frac{a \times \sin B}{\text{sinAxsinB}} \implies \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \text{ ve } \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \text{ eşitlikleri birleştirilerek}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{Sinüs Teoremi elde edilir.}$$

ABC üçgeninin köşelerinden geçen çevrel çemberin merkezi O olsun. OBC üçgeninde O dan BC ye inilen dik (OK), BC = a'yı iki eşit parçaya böler (Merkezden kirişe inilen dikler kirişi iki eşit parçaya böler).

BK = a/2 olur. Aynı dik COB merkez açısını da ikiye böler. COB merkez açısı CB yayını görür.

A açısı da aynı yayı gördüğünden dolayı COB = 2a olur. Bu durumda O_1 = A olur.

$$\text{OBK üçgeninde; } \sin O_1 = \sin A = \frac{BK}{OB} = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R} \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } \sin A = \frac{a}{2R} \text{ veya } \frac{a}{\sin A} = 2R \text{ bulunur.}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ eşitliğini } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ eşitliğine eklersek}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Böylece sinüs teoreminin bir başka sonucu olarak bir üçgende kenarların karşılarındaki açıların sinüslerine oranlarının üçgenin çevrel çemberinin çapına eşit olduğu ortaya çıkar.

Haritacılıkta nirengi ve poligon ağlarında, birbirine açı ve kenar ölçmeleri sonucunda bağlanmış üçgenler oluşturulur. Bu tür üçgenlerin çözümünde bilinen elemanlardan yararlanarak bilinmeyen elemanların hesaplanmasında sinüs teoremi çok kullanılır.

Örnek: Bir üçgene ait $a = 36$ cm $B = 72^\circ$ ve $C = 55^\circ$ olduğuna göre b ve c kenarlarını bulunuz.

$$A = 180 - (B + C) = 180 - (72 + 55) = 53^\circ \text{ bulunur.}$$

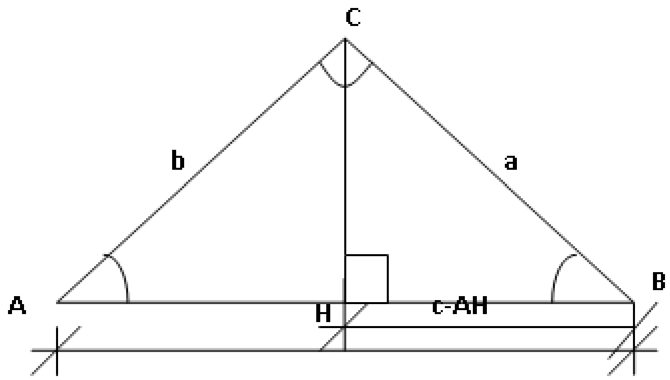
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{eşitliğinden} \quad b = a \times \frac{\sin B}{\sin A} = 36 \times \frac{\sin 72^\circ}{\sin 53^\circ} = 42{,}87 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{eşitliğinden} \quad c = a \times \frac{\sin C}{\sin A} = 36 \times \frac{\sin 55^\circ}{\sin 53^\circ} = 36{,}92 \text{ cm}$$

4.2. Kosinüs Teoremi

Teorem : Bir üçgende herhangi bir kenarın karesi diğer iki kenarın kareleri toplamından bu iki kenarın ve aralarındaki açının kosinüsünün çarpımının iki katının çıkarılmasına eşittir.

İspat: Şekildeki ABC dar açılı üçgeninde C köşesinden inilen dikle oluşturulan ACH ve BHC dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden;



Şekil 4.2: Dar açılı üçgen

$CH^2 = b^2 – AH^2$ ve $CH^2 = a^2 – HB^2$ bağıntıları yazılabilir.

Bu iki ifade birbirine eşitlenip HB= c- AH olarak yerine konursa

$b^2 – AH^2 = a^2 – (c – AH)^2 = a^2 – (c^2 – 2AHc + AH^2) = a^2 – c^2 – AH^2 + 2AHc$

$b^2 = a – c^2 - AH^2 + 2AHc + AH^2 = a^2 – c^2 +2AHc$

$$\cos A = \frac{AH}{b} \Longrightarrow AH = b \cos A \text{ olur.}$$

Bu eşitliği, $b^2 = a – c^2 - AH^2 + 2AHc + AH^2 = a^2 – c^2 +2AHc$

formülünde yerine koyarsak $b^2 = a – c^2 + 2bc \cos A$ elde edilir.

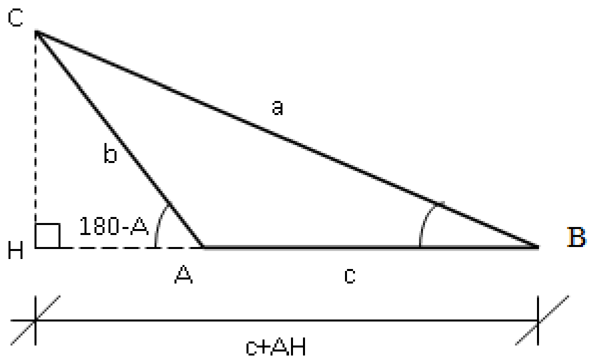
Bunun düzenlenmesiyle kosinüs teoremi olarak isimlendirilen ve üçgen çözümünde kullanılan $a^2= b^2+c^2+2bc \cos A$ eşitliği elde edilmiş olur.

Diğer köşelerden de dikler inilerek aynı işlemler tekrarlanıp diğer kenarlar için de yazılırsa

$b^2= a^2+c^2- 2ac \cos B$

$c^2= b^2+a^{2-}2ab \cos C$ eşitlikleri elde edilir.

Bu teorem; iki kenarı ve arasındaki açısı veya üç kenarı bilinen üçgenin çözümünde kullanılır.



Şekil 4.3: Üç kenarı bilinen üçgen

ABC üçgeni, şekildeki gibi geniş açılı üçgen olursa C köşesinden inilen dikle oluşturulan BHC dik üçgeninde;

$a^2 = CH^2 + HB^2$ **(1)**

ACH dik üçgeninde;

$CH^2 = b^2 - AH^2$ **(2)** ve

HB = c+ AH **(3)** 2 ve 3, 1'de yerine konursa

$a^2 = b^2 - AH^2 + (c + AH)^2 = b^2 - AH^2 + c^2 + 2AH.c + AH^2$ **(4)**

ACH dik üçgeninde

$$\text{Cos}(180 - A) = \frac{AH}{b} = -\cos A = \frac{AH}{b} \Longrightarrow AH = -b\cos A \quad \textbf{(5)}$$

Not: cos (180-A)= -cos A' dır. (II. bölgede kosinüs (-) işaretli olduğundan)II. III. bölgelerde yerine konulursa

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ eşitliği elde edilir.

Aynı şekilde $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$

eşitlikleri tekrar bulunur.

Sonuç olarak üçgen ister dar açılı olsun isterse geniş açılı olsun kosinüs teoremi ile elde edilen eşitlikler her iki üçgende de geçerli olur.

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$ eşitliğinden yararlanarak açılar kenarlar cinsinden yazılırsa;

$$\cos A = \frac{b^2 + c - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek :

Geniş açılı bir üçgende a= 218 m, b= 125 m, C= 130^g veriliyor. Üçgenin c kenar uzunluğunu bulunuz.

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$ eşitliğinden yararlanarak

$c^2 = (125)^2 + (218)^2 - 2.(218)x(125)\cos 130^g \Rightarrow c^2 = 87891{,}4822 \Rightarrow c = 296{,}465m$ bulunur.

4.3. Küçük Açıların Trigonometrik Fonksiyonları

Küçük açıların trigonometrik fonksiyonları, matematiğin Maclaurin serisi ile tanımlanabilir. Bu tanıma göre herhangi bir f(x) fonksiyonu,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots \ldots \ldots + \frac{x''}{n!} f''(0) + \ldots \ldots$$ şeklinde

yazılabilir.

Bu fonksiyonda f', f'', ..., f'' sembolleri f(x) fonksiyonunun x değişkenine göre sırasıyla 1, 2, ..., n türevlerini , ! sembolü ise faktöriyel anlamındadır.

Bu fonksiyonun açılımı sonucunda bu seriler, x açılarının radyan cinsinden değeri olmak üzere ispatsız olarak aşağıda verilmiştir:

$$\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \qquad (-oo < x < +oo)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x8}{8!} \qquad (-oo < x < +oo)$$

$$\mathrm{tg}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (|x| < \pi/2)$$

$$\text{cotgx}= \frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right. \qquad (0<|x|<\pi)$$

$$\text{secx}= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{360} - \frac{61x^6}{720} + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (|x|<\pi/2)$$

$$\text{cosecx}= \frac{1}{x} + \frac{x}{6} - \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (0<|x|<\pi)$$

Örnek 1: a kenarı 426,95m ve α açısı 54^g, 4692 olarak ölçülen dış çember yarı çapını (R) hesaplayınız.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ eşitliğinden}$$

$$R= \frac{a}{2\sin a} = \frac{426{,}95}{2x\sin 54^g{,}4692} \Rightarrow \boxed{R= 282{,}76\ m}$$

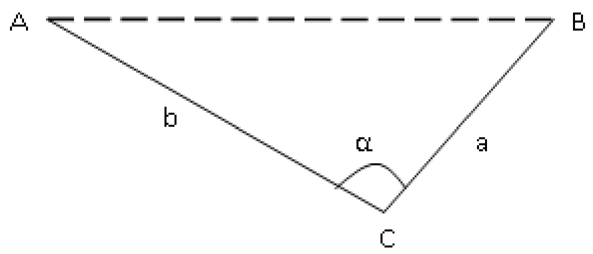
Örnek 2: Bir üçgenin kenarları a= 3, b= 7, c= 8 birim verildiğine göre B açısını derece ve grad olarak bulunuz.

$$\cos B= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{eşitliğinden} \quad \cos B= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\ ac} = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 8} = 0{,}5$$

B= arc cos0,5 = 60° = 66^g,6666 olarak hesaplanır.

Örnek 3: Aralarında engel nedeni ile şekildeki AB uzaklığını, b= 42,50m , a= 73, 65m

α = 93^g, 251 ölçülerinden yararlanarak hesaplayınız.



$c^{2} = b^{2} + a^{2} – 2ab \cos C$ eşitliğinden yararlanarak

AB= $\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2 - 2ab\, x\, cos\alpha}}$

AB= $\sqrt{(73{,}65m)^2 + (42{,}50m)^2 - 2.73{,}65m.42{,}50m.\cos 93^g{,}2510}$

AB= 87,10 m

Örnek 4: X= 1° nin sinüs ve kosinüs değerlerini seriler yardımıyla bulunuz.

Önce x açısının radyan değeri

$$X= \frac{1°}{p°} = \frac{1}{\frac{180}{\Pi}} = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$$

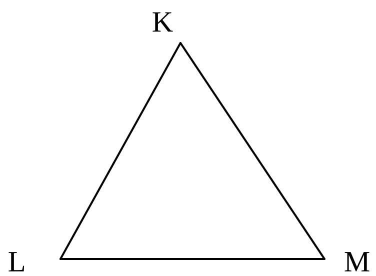
X= 0,01745329 $- \frac{X^3}{6} = 0{,}000000886$ sinx= + 0,017452406

1= 1,00000000 $- \frac{X^2}{2} = - 0{,}00015231$ cosx= + 0,0999847691

Örnek5:

KLM üçgeninde;

|KL| = 28.65 m
|LM| = 24.88 m
L açısı =72^g
K açısı=57^g
M açısı=71^g



KM kenarını sinüs teoremiyle hesaplayalım.

KM = KL x sinL / sinM'dir.

KM = $28.65x \sin72^g / \sin71^g$

KM = 28.86 m

KM kenarını kosinüs teoremiyle hesaplayalım.

$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \times KL \times LM \times \cos L$

$KM^2 = 28.65^2 + 24.88^2 - 2x\ 28.65 \times 24.88 \times \cos72^g$

KM = 28.85 m

UYGULAMA FAALİYETİ

Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonlarla ilgili teoremleri uygulayınız.

1. Bir dik üçgende b= 25,03m ve α =46^{g},3407 olduğuna göre diğer kenar ve açıları bulunuz.

2. Bir üçgende a= 35m, b=40m ve c= 45m olduğuna göre üçgenin iç açılarını hesaplayınız.

3. X= 1^{g} ın sinüs ve kosinüs değerlerini seriler yardımıyla bulunuz.

İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Sinüs teoremi ile ilgili hesaplamaları yapınız.	➢ Sinüs teoreminden faydalanınız.
➢ Kosinüs teoremi ile ilgili hesaplamaları yapınız.	➢ Kosinüs teoreminden faydalanınız.
➢ Küçük açıların trigonometrik fonksiyonlarını hesaplayınız.	➢ Konuyla ilgili örnekleri inceleyiniz.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		Evet	Hayır
1	Sinüs teoremi ile ilgili hesaplamaları yaptınız mı?		
2	Kosinüs teoremi ile ilgili hesaplamaları yaptınız mı?		
3	Küçük açıların trigonometrik fonksiyonlarını hesapladınız mı?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz.

UYGULAMA FAALİYETİ

Kuralına uygun trigonometrik fonksiyonlarla ilgili teoremleri uygulayayınız.

1. 34500 cm kaç km' dir?
150 km^2 lik alan kaç $m^{2'}$ dir?
7500cm^3 kaç $hm^{3'}$ eder?
α = 2.63042 radyanlık açı kaç derece ve grada eşittir?

2. $\cos\alpha = \frac{2}{4}$ ise sinα=? tgα=? Cotgα=? Secα=? Cosecα=?

3. Bir üçgende a = 29 cm. B = 65° ve C = 48° olduğuna göre b ve c kenarlarını bulunuz.

İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Ölçü birimlerinin dönüşümlerini yapınız.	➢ Uzunluk, alan, hacim ve açı dönüşümlerini hatırlayınız.
➢ Trigonometrik fonksiyonları tanımlayınız.	➢ İkinci öğrenme faaliyetinden faydalanınız.
➢ Cos α değeri verilmiş trigonometrik fonksiyonların diğerlerini bulunuz.	➢ Cos α değeri bilindiğine göre sin α, tg α, cotg α, sec α ve cosec α değerlerini bulunuz.
➢ Kenar uzunluklarını sinüs teoremine göre hesaplayınız.	➢ Dördüncü öğrenme faaliyetinde sinüs teoremiyle ilgili verilen bilgilerden yararlanınız.

KONTROL LİSTESİ

Bu faaliyet kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için Evet, kazanamadığınız beceriler için Hayır kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		Evet	Hayır
1	Ölçü birimlerinin dönüşümlerini yaptınız mı?		
2	Trigonometrik fonksiyonları tanımladınız mı?		
3	Cos α değeri verilmiş trigonometrik fonksiyonların diğerlerini buldunuz mu?		
4	Kenar uzunluklarını sinüs teoremine göre hesapladınız mı?		

DEĞERLENDİRME

Değerlendirme sonunda "Hayır" şeklindeki cevaplarınızı bir daha gözden geçiriniz. Kendinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz. Bütün cevaplarınız "Evet" ise "Ölçme ve Değerlendirme"ye geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

1. Bir üçgende C= 63° ve a= 3b olduğuna göre üçgenin diğer açıları aşağıdakilerden hangisidir?
A)A=97°,7 B=19°,3 B)A=19°,3 B=97°,7 C)A=39°,2 B=77°,8 D)A=77°,8 B=39°,2

2. α=30° olarak verilen açının sinüs ve kosinüs değerlerini seriler yardımıyla bulunuz.
A)A=97°,7 B=19°,3 B)A=19°,3 B=97°,7 C)A=39°,2 B=77°,8 D)A=77°,8 B=39°,2

3. A= 92^{g},158 a= 122m ve b^2+c^2= 16960 olarak verilen üçgenin b ve c kenarlarını bulunuz.

A)b=76 c= 108 B) b= 88 c=96 C) b= 108 c=76 D) b= 96 c=88

4. a ve b gibi iki kenarı ve α açısı verilen üçgenin c kenarını hesaplayınız.
A)55,17 B)54,17 C)53,17 D)52,17

5. a= 36 cm ve β= 72° ve γ=55° verilen üçgenin b ve c kenarlarını hesaplayınız.
A)b=42,87 c=36,92 B) b= 45 c= 33 C) b= 36,92 c= 42,87 D) b= 33 c= 45

6. a ve b gibi iki kenarı ve α açısı verilen üçgenin β açısını hesaplayınız.

a=36 cm, b=28 cm, α=27°,30
A)22 B)22°,3 C)21° D)21°,3

7. a, b ve c gibi üç kenarı verilen üçgenin α açısını bulunuz. a=4 b=13 c=15
A)12°,15 B) 13°,15 C) 14°,15 D) 15°,15

8. a ve b kenarları ile aralarındaki α açısı verilen üçgenin c kenarını bulunuz.
a=10 b=8 α= 70°

A)10,45 B)11,45 C)12,45 D)13,45

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise “Modül Değerlendirme”ye geçiniz.

MODÜL DEĞERLENDİRME

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

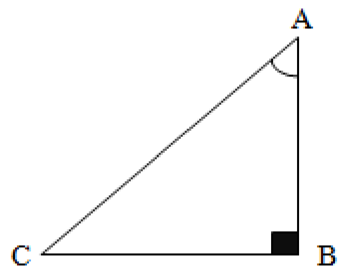
1. $68^{\circ}\ 15^{'}\ 45^{''}$ lik açı grad birimine dönüştüğünde sonuç ne olur?
A) $75^{g}\ 84^{c}\ 76^{cc}$ B) $74^{g}\ 84^{c}\ 72^{cc}$ C) $74^{g}\ 72^{c}\ 84^{cc}$ D) $75^{g}\ 84^{c}\ 72^{cc}$

2. $52^{g}\ 72^{c}\ 15^{cc}$ lik açı radyan birimine dönüştüğünde sonuç ne olur?
A) $0,828147\pi$ B) $0,848174\pi$ C) $0,882814\pi$ D) $0,914711\pi$

3. $\alpha = 70^{g}$ $\beta = 30^{g}$ sin 70^{g} açısının tümler açısı hangisidir?
A) $\sin 70^{g}$ B) $\cos 70^{g}$ C) $\cos 30^{g}$ D) $\mathrm{tg}\,30^{g}$

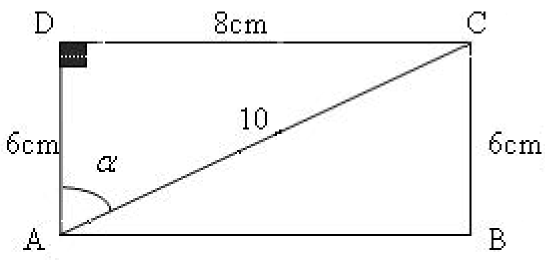
4. sin53°= cosX verildiğine göre X açısı aşağıdakilerden hangisidir?
A) Sin37° B)cos37° C)cos53° D)tg53

5. Şekildeki ABC dik üçgeninde tg (ACB) = 1/2 veriliyor. Buna göre sin (CAB) kaçtır?



A) $2/\sqrt{5}$ B) $1/\sqrt{5}$ C) $1/\sqrt{5}$ D) $1/\sqrt{2}$

6. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde |AC| köşegendir.



A(ABCD) = 48 cm^2 dir.
|BC| = 6 cm'dir. Buna göre cos α kaçtır?

A) 4/5 B) 3/5 C) 5/3 D) 5/4

7. a kenarı ile β ve γ açıları verilen üçgenin b kenarı aşağıdakilerden hangisidir?
$a=24$, $\beta=53°$, $\gamma=104°$

A)48,05 B)49,05 C)50,5 D)51,05

8. a ve b kenarları ile aralarındaki γ açısı verilen üçgenin c kenarı aşağıdakilerden hangisidir?
$a=8$, $b=10$, $\gamma=120°$
A)13,62 B)14,62 C)15,62 D)16,62

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarıyla karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları faaliyete geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki modüle geçmek için öğretmeninize başvurunuz.

CEVAP ANAHTARLARI

ÖĞRENME FAALİYETİ -1'İN CEVAP ANAHTARI

1	C
2	B
3	B
4	A
5	C
6	D
7	A
8	D
9	C
10	B
11	D
12	B

ÖĞRENME FAALİYETİ -2'NİN CEVAP ANAHTARI

1	B
2	C
3	A
4	D
5	D
6	D
7	B
8	D

ÖĞRENME FAALİYETİ-3'ÜN CEVAP ANAHTARI

1	**B**
2	**C**
3	**D**
4	**A**
5	**C**
6	**B**
7	**B**
8	**D**
9	**B**
10	**D**
11	**A**
12	**B**

ÖĞRENME FAALİYETİ -4'ÜN CEVAP ANAHTARI

1	**A**
2	**B**
3	**D**
4	**C**
5	**A**
6	**D**
7	**C**
8	**A**

MODÜL DEĞERLENDİRMENİN CEVAP ANAHTARI

1	**D**
2	**A**
3	**C**
4	**B**
5	**C**
6	**D**
7	**B**
8	**C**

KAYNAKÇA

- ERSOY Nihat, **Trigonometri**, Ankara, 2001.
- MEGEP **İnşaat Teknolojisi Alanı Çerçeve Öğretim Programı,** Ankara**,** 2005.